METHODEN DER MATHEMATISCHE PHYSICA

III

College aan de Rijksuniversiteit te
Utrecht in de cursus 1968-1969
gegeven door

N.G. van Kampen
(met medewerking van B.Q.P.J. de Wit)

REPRODUKTIE FYSISCH LABORATORIUM

METHODEN DER MATHEMATISCHE PHYSICA

III

College aan de Rijksuniversiteit te
Utrecht in de cursus 1968-1969
gegeven door

N.G. van Kampen
(met medewerking van B.Q.P.J. de Wit)

Mathematics is an interesting
intellectual sport, but it should
not be allowed to stand in the way
of obtaining sensible information
about physical processes.

M.L. Goldberger and K.M. Watson

INHOUD

	pag.
INLEIDING	i
I. ALGEMENE EIGENSCHAPPEN VAN PARTIELE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN	
1. De partiële differentiaalvergelijking en haar randvoorwaarden	I,1
2. Heuristisch onderzoek van de algemene vergelijking	I,4
3. Bespreking van voorwaarde (a); karakteristieken	I,6
4. Bespreking van voorwaarde (b)	I,9
5. Bespreking van voorwaarde (c)	I,11
6. Standaardvormen voor quasi-lineaire vergelijkingen	I,14
II. DE POTENTIAALVERGELIJKING	
1. Algemene beschouwingen	II,1
2. Oplossingen van de Laplace-vergelijking	II,6
3. Randen met axiale symmetrie	II,12
4. Het variatieprincipe	II,17
5. De formules van Green	II,23
6. De functies van Green	II,25
7. Gedrag van Greense functies op de rand	II,29
8. Het potentiaalprobleem in twee dimensies	II,34
III. DE GOLFVERGELIJKING	
1. Inleiding	III,1
2. De Helmholtz-vergelijking	III,3
3. Uitweiding over operatoren	III,9
4. De Greense functies voor de golfvergelijking	III,13
5. Maximum snelheid en het principe van Huygens	III,20
IV. HET THEOREMA VAN NOETHER	
1. Het algemene variatieprincipe	IV,1
2. Transformaties	IV,6
3. De stelling van Noether	IV,10
4. Toepassing op klassieke velden	IV,15
5. Transformaties van het veld alleen	IV,20
6. Verband met de viriaalstelling	IV,28

INLEIDING

Dit is het derde deel van de serie "Methoden der Mathematische Physica". Het eerste deel wordt gevormd door het gelijknamige college gegeven in de cursus 1966-1967; het tweede deel door het college van Ruijgrok in de cursus 1967-1968. Voorkennis van delen I en II is niet vereist, maar wel zal soms naar de dictaten verwezen worden. Voor algemene litteratuur zie de Inleiding van deel I; van bijzonder belang zijn

I.N. Snoddon, Elements of Partial Differential Equations;

A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii, Equations of Mathematical Physics;

R. Courant und D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, II.

Het onderwerp van dit college is partiële differentiaalvergelijkingen van de tweede orde. Partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde zijn in deel II behandeld. We beginnen met een algemene discussie (Hoofdstuk I) en behandelen daarna lineaire partiële differentiaalvergelijkingen van de tweede orde voor één onbekende functie u. Het bijzondere geval van de warmtegeleidingsvergelijking is in deel I behandeld als een uitbreiding van de theorie van simultane gewone differentiaalvergelijkingen. M.a.w. de tijd t werd beschouwd als de onafhankelijke variabele, terwijl de x,y,z overeen kwamen met de index ν, die de onbekende functies u_ν onderscheidt. Voor de warmtegeleidingsvergelijking en de Schrödingervergelijking is dat een zeer natuurlijke methode, en voor de golfvergelijking is hij ook nog mogelijk. Maar voor de potentiaalvergelijking bijvoorbeeld is deze methode niet goed; de reden daarvan zal later duidelijk worden. In het volgende worden de vergelijkingen van meet af aan echt als partiële differentiaalvergelijkingen beschouwd, d.w.z. de onafhankelijke variabelen x,y,z,t worden zoveel mogelijk op gelijke voet behandeld.

Hoofdstuk I.

ALGEMENE EIGENSCHAPPEN VAN PARTIELE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

1. De partiële differentiaalvergelijking en haar randvoorwaarden.

Beschouw het eenvoudigste geval: twee onafhankelijke variabelen x,y en één onbekende functie u(x,y). De partiële afgeleiden van u worden vaak geschreven u_x, u_{xx}, u_{xy}, etc. De algemeenste gedaante van een partiële differentiaalvergelijking van de tweede orde is

$$F(x,y,u,\ u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}) = 0. \qquad (1)$$

Het probleem is die functies u(x,y) te vinden, die voldoen aan deze vergelijking en bovendien aan zekere randvoorwaarden. De randvoorwaarden zijn een essentieel onderdeel van het probleem en vormen vaak de voornaamste moeilijkheid. De reden is dat het meestal niet mogelijk is om eerst alle oplossingen van (1) aan te geven en vervolgens daarna die uit te kiezen, die aan de randvoorwaarden voldoet, zoals bij gewone differentiaalvergelijkingen. Het is daarom gewoonlijk nodig om al van het begin af de vergelijking op te lossen in een gedaante die aan de randvoorwaarden aangepast is. Van belang is daarbij de vraag welke randvoorwaarden gesteld kunnen worden opdat er één en slechts één u voldoet. Die vraag wordt in dit hoofdstuk besproken, maar het is niet mogelijk haar volledig te beantwoorden. In de natuurkunde echter dient een differentiaalvergelijking voor de beschrijving van een bepaald physisch systeem, en dan is het meestal (maar niet altijd) duidelijk wat de aangepaste randvoorwaarden zijn.

Voorbeeld. Beschouw de warmtegeleiding in een oneindig lange staaf, $-\infty<x<\infty$. Laat het warmtegeleidingsvermogen λ

en de soortelijke warmte (per lengte-eenheid) c functies van de temperatuur u zijn. Dan voldoet u aan de niet-lineaire vergelijking

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Het is physisch duidelijk dat er een en slechts een oplossing is voor $t > 0$, wanneer $u(x,0)$ gegeven is voor alle x. De algemene oplossing van de vergelijking bevat dus één willekeurige functie van x, die dezelfde rol vervult als de integratieconstante bij een gewone differentiaalvergelijking.

Voorbeeld. Men verwacht dat de een-dimensionale golfvergelijking

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad (-\infty<x,t<\infty)$$

een eenduidige oplossing heeft bij gegeven $u(x,0)$ en $u_t(x,0)$. Dat is gemakkelijk te verifiëren, doordat het in dit geval mogelijk is de algemene oplossing expliciet neer te schrijven

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t) \tag{2}$$

met willekeurige functies f en g. Om aan de gestelde randvoorwaarde te voldoen moet men f en g oplossen uit

$$f(x) + g(x) = u(x,0)$$

$$f'(x) - g'(x) = u_t(x,0).$$

In dit geval bevat de algemene oplossing dus twee willekeurige functies.

Opgave 1. Leid de vermelde algemene oplossing voor de een-dimensionale golfvergelijking af. (Aanwijzing: voer als nieuwe onafhankelijke variabelen in: $\xi = x + t$ en $\eta = x - t$.)

Opgave 2. Laat zien dat $u(x,t)$ inderdaad eenduidig bepaald is door de gestelde randvoorwaarde en druk de oplossing expliciet uit in $u(x,0)$ en $u_t(x,0)$.

Opgave 3. Geef de algemene oplossing van de vergelijking $u_{xy} = 0$ en onderzoek welke vrijheid men heeft bij het opleggen van randvoorwaarden op de x-as.

Voorbeeld. De vergelijking voor de electrostatische potentiaal in een twee-dimensionaal gebied zonder ladingen is

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

De physische betekenis van deze vergelijking leidt tot de volgende mogelijke randvoorwaarden.

(i) Als L een gesloten kromme is, en u is gegeven op L, dan is u eenduidig bepaald in het binnengebied.

(ii) Met dezelfde randvoorwaarde is u eenduidig bepaald in het buitengebied, mits men eist dat u naar nul gaat in het oneindige.

(iii) Men kan ook op een al of niet gesloten kromme L de ladingsdichtheid σ voorschrijven; dat komt neer op de "randvoorwaarde"

$$(u_n)_{buiten} - (u_n)_{binnen} = -4\pi\sigma \quad \text{op} \quad L,$$

waar u_n de afgeleide in de richting van de normaal op L voorstelt. De oplossing is weer eenduidig bepaald als men ook nog eist dat hij in het oneindige nul wordt.

Opgave 4. Geef in dat laatste geval de expliciete gedaante van u(x,y).

De conclusie uit deze voorbeelden is, dat de aangepaste randvoorwaarden bij verschillende differentiaalvergelijkingen geheel verschillende gedaanten kunnen hebben. Het is niet moeilijk analoge voorbeelden voor meer dan twee onafhankelijke variabelen te construeren.

2. Heuristisch onderzoek van de algemene vergelijking (1).

Schrijf (1) in de gedaante

$$u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy}). \qquad (3)$$

Stel dat als randvoorwaarde de waarden van u en u_y op de x-as zijn voorgeschreven. Dan zijn ook bekend $u_x(x,0)$, $u_{xx}(x,0)$ en $u_{xy}(x,0)$. Daarmee is het hele rechterlid van (3) bekend voor $y = 0$. De vergelijking geeft dan $u_{yy}(x,0)$. Vervolgens kan men (3) naar y differentiëren en weer $y = 0$ invullen:

$$u_{yyy}(x,0) = f_y+f_u u_y+f_{u_x} u_{xy}+f_{u_y} u_{yy}+f_{u_{xx}} u_{xxy}+f_{u_{xy}} u_{xyy}.$$

Wederom is het rechterlid bekend, zodat nu $u_{yyy}(x,0)$ gevonden is. Zo voortgaand vindt men alle afgeleiden naar y; de oplossing $u(x,y)$ is dan gegeven door de Taylor-reeks

$$u(x,y) = u(x,0) + yu_y(x,0) + \frac{y^2}{2} u_{yy}(x,0) + \frac{y^3}{3!} u_{yyy}(x,0) + \ldots$$

Daarmee is een oplossing gevonden van (1) bij gegeven $u(x,0)$ en $u_y(x,0)$, mits aan de volgende voorwaarden voldaan is.

(a). Het is inderdaad mogelijk u_{yy} op te lossen uit (1), en (3) geldt in een strook langs de x-as.

(b). Alle afgeleiden bestaan; deze veronderstelling heeft niet alleen betrekking op de functie f, maar ook op de beginwaarden $u(x,0)$ en $u_y(x,0)$.

(c). De resulterende Taylor-reeks is convergent, althans in een of andere strook om de x-as, en mag bovendien gebruikt worden om $u_x(x,y)$ en $u_{xx}(x,y)$ te vinden.

Het is niet practisch om voor specifieke gevallen expliciet te bewijzen dat aan deze voorwaarden voldaan is, maar wel is het nuttig om in te zien wàt ze betekenen. Ze zullen in de volgende paragrafen besproken worden, maar eerst vatten we nog even het resultaat samen voor het geval dat dit heuristische procédé inderdaad werkt.

We hebben een eenduidige oplossing $u(x,y)$ gevonden met willekeurig voorgeschreven $u(x,0)$ en $u_y(x,0)$. De algemene oplossing bevat dus twee willekeurige functies van één variabele. Het is nuttig om het resultaat meetkundig voor te stellen. Elke functie $u(x,y)$ komt overeen met een oppervlak in de drie-dimensionale (x,y,u)-ruimte. De oplossingen van de differentiaalvergelijking vormen een deelverzameling van de verzameling van al deze oppervlakken. De beginwaarde $u(x,0)$ legt de snijkromme van de oplossing met het (x,u)-vlak vast. De beginwaarde $u_y(x,0)$ legt de helling in elk punt van die snijkromme vast. Tezamen kunnen beide beginvoorwaarden door een oneindig smalle strook worden voorgesteld. We hebben dus gevonden dat een willekeurig voorgeschreven strook boven de x-as op een en slechts een manier uitgebreid kan worden tot een oppervlak dat aan de differentiaalvergelijking voldoet.

De speciale rol die we aan de x-as hebben toebedeeld was alleen voor het gemak. Laat de variabelen x,y aan een willekeurige transformatie onderworpen worden

$$\xi = \xi(x,y), \qquad \eta = \eta(x,y). \tag{4}$$

De vergelijking (1) gaat dan in een nieuwe vergelijking over, die echter dezelfde algemene vorm heeft,

$$\Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta},u_{\eta\eta}) = 0.$$

Dezelfde heuristische redenering voert dan tot het resultaat, dat er één oplossing is door een willekeurig gegeven strook boven de ξ-as. Elke voldoend gladde kromme in het (x,y)-vlak kan op de ξ-as worden afgebeeld door geschikte keuze van de transformatie, mits die kromme topologisch met een rechte overeenkomt. Onder ruime voorwaarden geldt dus: door elke strook in de (x,y,u)-ruimte gaat een en slechts een oplossing van de differentiaalvergelijking.

3. Bespreking van voorwaarde (a); karakteristieken.

Om de discussie niet onnodig ingewikkeld te maken beperken we ons thans tot quasi-lineaire vergelijkingen, dat is *)

$$F \equiv A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y,u,u_x,u_y) = 0. \qquad (5)$$

Het is duidelijk dat aan voorwaarde (a) voldaan is tenzij

$$C(x,0) = 0.$$

Wanneer dit zich voordoet, noemt men de x-as een karakteristiek van onze tweede-orde partiële differentiaalvergelijking.

In dat geval reduceert de vergelijking op de x-as tot

$$A(x,0)u_{xx} + 2B(x,0)u_{xy} + D(x,0,u,u_x,u_y) = 0.$$

Bij gegeven $u(x,0)$ is dit een gewone differentiaalvergelijking voor de functie $u_y(x,0)$. Met andere woorden, indien de x-as een karakteristiek is kan men niet meer $u(x,0)$ en $u_y(x,0)$ vrij kiezen, maar is bij gekozen $u(x,0)$ de bijbehorende $u_y(x,0)$ vastgelegd, op één integratie-constante na. Meetkundig gesproken, men kan als randvoorwaarde niet meer een willekeurige strook boven de x-as kiezen, maar alleen een willekeurige kromme plus de helling in één punt; de helling in alle andere punten van de strook is dan door de vergelijking zelf vastgelegd.

Opgave 5. We hebben stilzwijgend verondersteld $B(x,0) \neq 0$. Bespreek het geval $C(x,0) = B(x,0) = 0$.

*) Eigenlijk verstaat men hieronder vergelijkingen die lineair zijn in de tweede afgeleiden, maar waarbij de coefficienten A,B,C functies van x,y,u,u_x,u_y mogen zijn. Veel van wat hier gezegd zal worden geldt ook voor dit algemene geval, daarom hebben we geen afzonderlijke naam ingevoerd voor vergelijkingen van de gedaante (5).

Opgave 6. De vergelijking

$$y^3 u_{xx} - y u_{yy} + u_y = 0 \qquad (6)$$

kan expliciet opgelost worden door $\frac{1}{2}y^2$ als nieuwe variabele in te voeren. Verifieer daarmee expliciet dat de x-as een karakterestiek is.

Opgave 7. Behandel de warmtegeleidingsvergelijking.

Opgave 8. Toon aan dat een quasi-lineaire vergelijking (5) door de transformatie (4) in een quasi-lineaire vergelijking wordt overgevoerd, m.a.w. dat quasi-lineariteit invariant is voor deze transformatie. Vind de coefficienten A,B,C in de getransformeerde vergelijking. In het bijzonder de getransformeerde C is

$$\Gamma(\xi,\eta) = A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 . \qquad (7)$$

Totnogtoe is alleen onderzocht of de x-as karakteristiek is, maar door de transformatie (4) kan een binnen wijde grenzen willekeurige kromme tot ξ-as worden gekozen. De voorwaarde dat die kromme karakteristiek is, is dan dat (7) gelijk nul is. M.a.w. om alle karakteristieken te vinden móet men de oplossingen $\eta(x,y)$ zoeken van de eerste-orde partiële differentiaalvergelijking

$$A(x,y)\,\eta_x^2 + 2B(x,y)\,\eta_x\eta_y + C(x,y)\,\eta_y^2 = 0; \qquad (8)$$

met elke oplossing $\eta(x,y)$ komt een karakteristiek overeen gegeven door $\eta(x,y) = 0$.

Als (dx,dy) een lijnelement van de karakteristiek is, geldt

$$\eta_x dx + \eta_y dy = 0 \qquad \text{of} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\eta_x}{\eta_y} .$$

Door invullen in (8) ziet mén dat de karakteristiek een oplossing is van de gewone differentiaalvergelijking van de eerste orde

$$A(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B(x,y)\frac{dy}{dx} + C(x,y) = 0. \qquad (9)$$

Omgekeerd is makkelijk in te zien dat elke oplossing van deze vergelijking ook een oplossing van (8) oplevert. Derhalve is (9) een alternatieve vergelijking voor de karakteristieken.

Opgave 9. Bewijs dat (8) en (9) equivalent zijn.

Opgave 10. Vind alle karakteristieken van de een-dimensionale warmtegeleidingsvergelijking en golfvergelijking.

Opgave 11. Vind de karakteristieken van (6).

Opgave 12. Bewijs dat als men de voorwaarden (8) of (9) in andere coordinaten opschrijft, de resulterende karakteristieken dezelfde zijn.

Indien men met reële differentiaalvergelijkingen te maken heeft, geeft de vergelijking (8) of (9) voor de karakteristieken aanleiding tot de volgende fundamentele classificatie.

(i) $AC - B^2 > 0$; er bestaan geen reële karakteristieken. De differentiaalvergelijking heet dan elliptisch.

(ii) $AC - B^2 < 0$; er bestaan twee stellen reële karakteristieken: hyperbolische differentiaalvergelijking.

(iii) $AC - B^2 = 0$; de beide stellen vallen samen zodat er slechts een stel reële karakteristieken is: parabolische differentiaalvergelijking.

De klassieke voorbeelden van de drie gevallen zijn respectievelijk de potentiaalvergelijking, de golfvergelijking en de warmtegeleidingsvergelijking. Het onderscheid tussen de drie typen is physisch belangrijk, omdat de oplossingen in de drie gevallen geheel verschillende eigenschappen hebben, zoals uit deze voorbeelden duidelijk is. Als A,B,C niet constant zijn, doch van x en y afhangen, kan eenzelfde differentiaalvergelijking in verschillende gebieden van het x,y-vlak verschillend type hebben.

Opgave 13. In het hyperbolische geval kan men op een karakteristiek de waarde van u geven plus de helling in een punt; in het parabolische geval alleen de waarde. Laat dit zien.

Opgave 14. De Fokker-Planck vergelijking luidt

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[b(x)u\right] + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[a(x)u\right]$$

met gegeven functies $a > 0$ en b. Verifieer dat die van parabolisch type is, en dat de oplossing eenduidig bepaald is door $u(x,0)$.

Opgave 15. Bepaal het type van de "telegraaf-vergelijking"

$$u_{xx} = u_{tt} + u_t + cu.$$

Welke voorwaarden kan men opleggen voor $x = 0$?

Opgave 16. Schets de karakteristieken van

$$xu_{xx} - yu_{yy} = 0. \tag{10}$$

Welke functie-waarden kan men op de x-as voorschrijven?

4. Bespreking van voorwaarde (b).

We beperken ons weer tot de quasi-lineaire vergelijking (5) en veronderstellen $C \neq 0$ in een omgeving van de x-as, zodat aan voorwaarde (a) voldaan is. Men kan dus u_{yy} oplossen en (3) heeft nu de vorm

$$u_{uy} = -\frac{A(x,y)}{C(x,y)}u_{xx} - 2\frac{B(x,y)}{C(x,y)}u_{xy} - \frac{D(x,y,u,u_x,u_y)}{C(x,y)}.$$

Verder zijn gegeven de randwaarden $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_y(x,0) = \psi(x)$. Volgens het procédé in § 2 vindt men uit de vergelijking eerst $u_{yy}(x,0)$; dan differentieert men naar y en vervangt de optredende $u_{xyy}(x,0)$ door de zojuist gevonden uitdrukking; en zo voorts. Het is duidelijk dat daarbij hogere afgeleiden van A,B,C naar x en y optreden,

en ook hogere afgeleiden van D naar zijn argumenten, en tenslotte hogere afgeleiden van φ en ψ. Het procédé is dus mogelijk mits de functies A,B,C,D,φ,ψ oneindig vaak differentieerbaar zijn.

Deze voorwaarde is er alleen in gekomen door het gebruikte oplosprocédé, maar is niet werkelijk een voorwaarde voor het bestaan van oplossingen. Een welbekend voorbeeld is de vergelijking voor een Schrödinger-deeltje in een potentiaalput van eindige diepte: die kan opgelost worden hoewel de functie D discontinu is. Een ander voorbeeld zullen we nu uitwerken om te laten zien hoe deze voorwaarde weliswaar bij het oplossen wordt gebruikt maar in het eindresultaat overbodig is.

Beschouw de vergelijking met randvoorwaarden

$$u_{yy} = u_{xx}, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_y(x,0) = \psi(x).$$

Men vindt door successieve differentiaties

$$\left[\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}} u\right]_{y=0} = \varphi^{(2n)}(x) \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$\left[\frac{\partial^{2n+1}}{\partial^{2n+1}} u\right]_{y=0} = \psi^{(2n)}(x) \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

De Taylor-reeks voor $u(x,y)$ geeft dus

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} \varphi^{(2n)}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \psi^{(2n)}(x).$$

Dit is de oplossing, maar hij kan fraaier geschreven worden. De eerste som bevat juist de even termen van de Taylorontwikkeling van $\varphi(x)$, zodat men de sommatie kan uitvoeren:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} \varphi^{(2n)}(x) = \tfrac{1}{2}\left\{\varphi(x+y) + \varphi(x-y)\right\}.$$

Als men definieert $\psi(x) = \Psi'(x)$, bestaat de tweede som uit de oneven termen van de Taylor-ontwikkeling van $\Psi(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \Psi^{(2n+1)}(x) = \tfrac{1}{2}\left\{\Psi(x+y) - \Psi(x-y)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \psi(t)\,dt.$$

Daarmee hebben we gevonden de oplossing

$$u(x,y) = \tfrac{1}{2}\left\{\varphi(x+y) + \varphi(x-y)\right\} + \tfrac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \psi(t)\,dt.$$

Dit resultaat is reeds eerder gevonden (vgl. (2)) en kan ook door directe substitutie geverifieerd worden. Het is daardoor duidelijk, dat het helemaal niet nodig is dat φ en ψ oneindig vaak differentieerbaar zijn, het is voldoende dat de tweede afgeleide van φ bestaat en de eerste afgeleide van ψ. Gelukkig, want het is moeilijk een physische betekenis toe te kennen aan de voorwaarde dat alle afgeleiden bestaan. Natuurlijk heeft men wel het recht om zoals hier gebeurd is, de Taylor-reeks te gebruiken als hulpmiddel bij het zoeken naar een oplossing, die dan achteraf geverifieerd kan worden.

5. Bespreking van de voorwaarde (c).

Het in § 2 beschreven procédé leidt tot een Taylor-reeks voor u(x,y) en de vraag is of die convergeert. In het voorbeeld van § 4 bleek dat inderdaad het geval te zijn mits de beginwaarden $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ analytische functies zijn. Een stelling van Cauchy en Kowaleski *) zegt dat deze reeks altijd convergeert wanneer de functies A,B,C,D,φ,ψ analytisch zijn. In dat geval is er dus een en slechts een analytische oplossing van het probleem. Deze existentie-stelling is evenwel

*) Zie bijv. Courant-Hilbert II, Hoofdstuk I, § 7.

geen bevredigende oplossing van het probleem, omdat de eis dat de coefficienten A,B,C,D en de beginwaarden φ,ψ analytisch moeten zijn niet physisch geïnterpreteerd kan worden. In het voorbeeld van § 4 bleek deze eis dan ook achteraf overbodig. We geven nu een voorbeeld waarin deze eis wel degelijk onmisbaar is voor het resultaat, maar het zal blijken dat in dat geval het hele probleem onphysisch is.

Beschouw de vergelijking met randvoorwaarden

$$u_{yy} = -u_{xx}, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x).$$

Men vindt met zo als in § 4 de oplossing eerst in de vorm van een reeks,

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} \varphi^{(2n)}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \psi^{(2n)}(x).$$

De reeks kan weer formeel gesommeerd worden,

$$u(x,y) = \tfrac{1}{2} \left\{ \varphi(x+iy) + \varphi(x-iy) \right\} + \frac{1}{2i} \int_{x-iy}^{x+iy} \psi(t)\, dt.$$

Dit heeft alleen betekenis indien φ en ψ analytische functies zijn in een strook ter breedte $|y|$ aan weerszijden van de reële as. Als dat zo is convergeert de reeks voor u(x,y), anders niet. M.a.w. in dit geval legt de voorwaarde (c) wel degelijk een sterke en onmisbare beperking op aan de toelaatbare randwaarden.

Deze beperking is onphysisch en in de natuurkunde komt dit probleem niet voor. Het komt overeen met de vraag om de potentiaal te bepalen in een halfruimte als op de rand gegeven is de potentiaal en de ladingsdichtheid. In werkelijkheid is altijd hetzij de een hetzij de ander gegeven, met nog een voorwaarde over de potentiaal in het oneindige.

Hadamard heeft het onphysische van dit randwaardeprobleem nog duidelijker gemaakt door de volgende overweging. Neem als randwaarden

$$\varphi(x) = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon}, \qquad \psi(x) = 0 .$$

met een willekeurige constante ε. De oplossing is dan

$$u(x,y) = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon} \operatorname{Csh} \frac{y}{\varepsilon},$$

zoals eenvoudig geverifieerd kan worden. Als nu ε naar 0 nadert gaat u bij vaste x en y naar oneindig. Tegelijkertijd echter nadert de waarde van $\varphi(x)$ uniform naar 0. Anderzijds is de oplossing bij randwaarden $\varphi = 0$, $\psi = 0$ natuurlijk $u(x,y) = 0$. De oplossing hangt dus niet op continue wijze van de gegeven randwaarden af; een willekeurig kleine storing van de randwaarden kan leiden tot een willekeurig grote waarde van u. Als men de randwaarden kent met een kleine onzekerheidsmarge ε, kan men helemaal niets meer over de waarden van u voor $y \neq 0$ zeggen. Het is duidelijk dat zo'n probleem geen physische toepassingen heeft.

We concluderen dat een goed gesteld (bien passé, correctly set) probleem aan de volgende drie eisen moet voldoen.

(i) Existentie: bij de gestelde randvoorwaarden moet een oplossing bestaan, anders heeft het probleem geen toepassing.

(ii) Eenduidigheid: er moeten niet meer dan een of desnoods enkele oplossingen bestaan, anders is er nog niet genoeg physische informatie in de gegevens vervat.

(iii) Continuïteit: de oplossing mag niet overgevoelig zijn voor kleine wijzigingen in de randvoorwaarden, want anders is hij onbruikbaar.

In § 4 hebben we gevonden dat voor de golfvergelijking het probleem goed gesteld is wanneer men als randvoorwaarden kiest een gegeven $u(x,0)$ en $u_t(x,0)$. In deze paragraaf is aangetoond dat dit niet geldt voor de potentiaalvergelijking, en in het volgende hoofdstuk zullen we zien dat het potentiaalprobleem goed gesteld is als men de waarden van u

op een gesloten kromme geeft. Voor de warmtegeleidingsvergelijking geldt dat het probleem goed gesteld is wanneer men $u(x,0)$ geeft en de oplossing voor $t > 0$ zoekt, terwijl de oplossing voor $t < 0$ niet aan de continuïteitseis voldoet. De vermelde randvoorwaarden voor de golfvergelijking en de warmtegeleidingsvergelijking worden vaak "beginvoorwaarden" genoemd.

<u>Opgave 18</u>. Pas het vermelde procédé toe op de warmtegeleidingsvergelijking en bewijs dat het alleen tot een oplossing leidt indien de beginwaarde $u(x,0)$ analytisch is.

<u>Opgave 19</u>. Los de warmtegeleidingsvergelijking op met behulp van Fourier-transformatie (Hoofdstuk V van Deel I) en laat zien dat de oplossing voor $t > 0$ wel continu van de beginwaarde afhangt, maar voor $t < 0$ niet.

<u>Opgave 20</u>. Als men de trillingsvergelijking van een snaar met ingeklemde uiteinden oplost, vindt men een oneindig aantal eigentrillingen. Waarom is dit niet werkelijk in strijd met de eenduidigheidseis?

6. Standaardvormen voor quasi-lineaire vergelijkingen.

De vrijheid om door middel van een transformatie (4) nieuwe coordinaten in te voeren kan aangewend worden om elke vergelijking tot een zekere standaardvorm te herleiden.

Een vergelijking van het hyperbolische type heeft twee stellen karakteristieken, die samen een kromlijnig net in het (x,y)-vlak vormen. Laten we dat net gebruiken als coordinatennet voor nieuwe, kromlijnige coordinaten ξ,η. Dan zijn de lijnen ξ = constant en de lijnen η = constant karakteristieken van de vergelijking. Derhalve zijn in deze coordinaten de coefficienten A en C gelijk nul, en na delen door B krijgt de vergelijking de gedaante

$$u_{\xi\eta} = g(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Dit is de eerste standaardvorm voor hyperbolische vergelijkingen. Door een simpele transformatie krijgt men de tweede standaardvorm

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = g(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Bij een vergelijking van het parabolische type vallen de twee stellen karakteristieken samen. Kies de coordinaat η zo dat deze karakteristieken gegeven worden door $\eta = 0$, en een willekeurige tweede coordinaat ξ. Dan is in deze coordinaten $C = 0$ en ook $B = 0$, en na delen door A krijgt de vergelijking de gedaante

$$u_{\xi\xi} = g(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Dit is de standaardvorm voor parabolische vergelijkingen.

Een vergelijking van het elliptische type heeft twee stel karakteristieken die toegevoegd complex zijn. Stel dat zo worden gegeven door $\zeta(x,y) = 0$ en $\zeta^*(x,y) = 0$. Dan kan men ζ en ζ^* als coordinaten invoeren, en de vergelijking krijgt de hyperbolische standaardvorm

$$u_{\zeta\zeta^*} = g.$$

Definieer vervolgens de reële coordinaten ξ,η door de transformatie $\xi = \zeta + \zeta^*$, $\eta = i(\zeta - \zeta^*)$. De vergelijking wordt dan

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = g(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Dit is weer reëel en is de standaardvorm voor elliptische vergelijkingen.

Opgave 21. Laat zien dat de determinanten van de gebruikte transformaties niet nul kunnen zijn.

Opgave 22. Waarom is de elliptische standaardvorm zeker reëel?

Opgave 23. Breng de vergelijking (10) uit opgave 16 in standaardvorm.

Beschouw een quasi-lineaire vergelijking met n veranderlijken

$$\sum_{i,j} c_{ij}(x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + D\left(x_k, u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0.$$

Men kan wederom de veranderlijken transformeren:

$$\xi_k = \xi_k(x_1, \ldots, x_n). \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

De getransformeerde vergelijking luidt

$$\sum_{ijlm} c_{ij}(x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \ldots = 0.$$

De getransformeerde coefficienten zijn dus

$$\Gamma_{kl}(\xi) = \sum_{ij} c_{ij}(x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}.$$

De vraag is of het weer mogelijk is de transformatie zo te kiezen dat de coefficientenmatrix Γ_{kl} een eenvoudige gedaante krijgt zoals in de standaardvormen, te weten

$$\Gamma_{kl} = 0 \quad \text{voor} \quad k \neq l; \qquad \Gamma_{kk} = 1,\ -1,\ \text{of}\ 0. \tag{11}$$

Het blijkt wel mogelijk om voor een willekeurig gegeven punt x^o een transformatie te vinden die $c_{ij}(x^o)$ in deze diagonaalvorm transformeert, maar in het algemeen niet om één transformatie te vinden die dit voor alle x tegelijk tot stand brengt.

Inderdaad, laat x^o een vast punt zijn en beschouw de lineaire transformatie met constante coefficienten a_{ki},

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}(x_i - x_i^o).$$

Dan is

$$\Gamma_{kl}(\xi^0) = \Gamma_{kl}(0) = \sum_{ij} C_{ij}(x^0)\, a_{ki}\, a_{lj}.$$

In matrix-notatie

$$\Gamma = a\ C\ a^{\times},$$

waarin $a^{\times}$ de gespiegelde van a is. Volgens een welbekende stelling uit de lineaire algebra is het voor elke reële symmetrische C mogelijk een reële transformatie a te vinden waarvoor inderdaad Γ de gedaante (11) heeft.

Opgave 24. Waarom mag C symmetrisch ondersteld worden? Waarom hebben we hier niet met een hoofdassentransformatie te maken?

Opgave 25. De keuze van $a_{ki}(x^0)$ is niet eenduidig. Laat zien dat een nodige voorwaarde voor het bestaan van een niet-lineaire transformatie, die in elke punt x de matrix C(x) diagonaliseert, is dat althans voor één keuze der $a_{ki}(x)$ geldt

$$\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} = \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \quad \text{voor alle } i,j,k.$$

Wanneer in het punt x^0 alle diagonaalelementen +1 zijn (of allemaal -1) heet de vergelijking elliptisch in dat punt. Wanneer n-1 diagonaalelementen +1 zijn, en het n-de element -1 is (of omgekeerd) heet de vergelijking hyperbolisch. Wanneer een of meer nullen voorkomen heet hij parabolisch. Men kan nog meer gevallen onderscheiden, maar dat is voor ons doel niet dienstig.

In het speciale, en gelukkig veel voorkomende, geval dat de coefficienten C_{ij} constanten zijn is het natuurlijk mogelijk ze voor alle x tegelijk in diagonaalvorm te brengen. In dat geval bestaan er dus wel standaardvormen, namelijk

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} = g\left(\xi_1, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right) \quad \text{(hyperbolisch)}$$

$$\sum_{k=1}^{m<n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} = g\left(\xi_1, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right), \quad \text{(parabolisch)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} = g\left(\xi_1, u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right) \quad \text{(elliptisch)}$$

Opgave 26. Bewijs dat hyperbolische, parabolische en elliptische quasi-lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coefficienten respectievelijk in deze standaardvormen getransformeerd kunnen worden.

Opgave 27. Breid de besproken theorie van karakteristieken uit tot het geval van $n > 2$ variabelen. De karakteristieken zijn nu $(n-1)$-dimensionale oppervlakken, gegeven door

$$\sum_{ij} C_{ij}(x) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} = 0. \tag{12}$$

Opgave 28. Waarom is het niet meer mogelijk om op dezelfde manier als voor twee variabelen de matrix $C_{ij}(x)$ voor alle x tegelijk in diagonaalvorm te brengen?

Opgave 29. Behandel de theorie van karakteristieken voor de quasi-lineaire vergelijking van de eerste orde

$$A(x,y)\, u_x + B(x,y)\, u_y + D(x,y,u) = 0.$$

De karakteristieken zijn weer die krommen waarop de mogelijke beginwaarden beperkt zijn; zij worden gegeven door de gewone differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{A(x,y)} = \frac{dy}{B(x,y)}.$$

Overtuig u ervan dat dit dezelfde karakteristieken zijn als vermeld in Hoofdstuk I van Deel II.

A1. Partiële differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

De meeste partiële differentiaalvergelijkingen van de tweede orde die men tegenkomt zijn lineair in u met constante coëfficiënten (wellicht omdat dat de enige zijn waar men tamelijk volledige oplossingen voor kan construeren):

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 . \qquad (A1)$$

De inhomogene term G wordt weggewerkt door u te vervangen door u - G/F. In analogie met gewone differentiaalvergelijkingen proberen we oplossingen van de gedaante

$$u(x,y) = e^{px + qy} , \qquad (A2)$$

met twee nog onbepaalde constanten p,q. Substitutie levert de eis

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + Dp + Eq + F = 0 .$$

Dat stelt een tweede-graadskromme in het (p,q)-vlak voor. Elk punt op die kromme levert een oplossing. Complexe waarden van p en q doen ook mee, en zijn vaak de belangrijkste.

<u>Opgave</u>. Hoe kan men G wegwerken in het geval dat F nul is? Laat zien dat het inderdaad altijd mogelijk is.

<u>Opgave</u>. Vind alle mogelijke waarden van p en q voor de een-dimensionale golfvergelijking en voor de twee-dimensionale potentiaalvergelijking.

<u>Opgave</u>. Overtuig u ervan dat dezelfde redenering van toepassing is op het geval van een willekeurig aantal onafhankelijke variabelen.

Elke gevonden oplossing kan nog met een constante factor vermenigvuldigd worden en tenslotte kan men ze allemaal bij elkaar optellen. Bij elke waarde p horen twee waarden $q_1(p)$ en $q_2(p)$. Zo vindt men

$$u(x,y) = \int \left\{ C_1(p)\ e^{px + q_1(p)y} + C_2(p)\ e^{px + q_2(p)y} \right\} dp\ . \qquad \text{(A3)}$$

De integraal strekt zich uit over het hele complexe p-vlak, $p = p' + ip''$ en $dp = dp'dp''$. Verder zijn $C_1(p)$ en $C_2(p)$ twee willekeurige functies van p' en p". De enige beperking is dat de integraal betekenis heeft. De oorspronkelijke oplossingen van de gedaante (3) vindt men terug door voor C_1 of C_2 een delta-functie te kiezen.

We laten zien dat (3) voldoende algemeen is om onder zekere voorwaarden de vergelijking (1)(met G = 0)op te lossen als de waarden van u en zijn afgeleide u_y gegeven zijn bij y = 0,

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_y(x,0) = \psi(x)\ . \qquad \text{(A4)}$$

Daartoe veronderstellen we dat de vergelijking geldt in de strook $-\infty < x < \infty,\quad 0 \leqslant y < h.$

Uit (3) leest men af

$$u(x,0) = \int \left\{ C_1(p) + C_2(p) \right\} e^{px}\ dp\ ,$$

$$u_y(x,0) = \int \left\{ q_1(p)C_1(p) + q_2(p)C_2(p) \right\} e^{px}\ dp\ .$$

De vraag is of $C_1(p)$ en $C_2(p)$ zo gekozen kunnen worden dat deze functies gelijk worden aan de gegeven $\varphi(x)$, resp. $\psi(x)$. Het is voldoende voor p alleen zuiver imaginaire waarden te nemen, $p = ik$ $(-\infty < k < \infty)$.

Dan is de eis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C_1(ik) + C_2(ik) \right\} e^{ikx}\, dk = \varphi(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ q_1(ik)C_1(ik) + q_2(ik)C_2(ik) \right\} e^{ikx}\, dk = \psi(x).$$

Elk van deze twee vergelijkingen heeft de gedaante van een Fourier-transformatie en kan dus eenvoudig opgelost worden

$$C_1(ik) + C_2(ik) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \varphi(x)\, dx ,$$

$$q_1(ik)C_1(ik) + q_2(ik)C_2(ik) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \psi(x)\, dx .$$

Dit geldt zeker als φ en ψ kwadratisch integreerbaar zijn (in $L^2(-\infty,\infty)$ liggen).

Laten we de rechter leden $\Phi(k)$ en $\Psi(k)$ noemen. Dan moeten alleen nog C_1, C_2 bepaald worden uit

$$C_1 + C_2 = \Phi ,$$

$$q_1C_1 + q_2C_2 = \Psi .$$

Dat kan mits de determinant niet 0 is, dus $q_1 \neq q_2$. Daarmee is de oplossing gevonden van (1) met randvoorwaarde (4). Voorwaarden zijn dat φ en ψ kwadratisch integreerbaar zijn en dat de wortels q_1 en q_2 niet samenvallen voor enige imaginaire waarde ik van p. Paragraaf 3 gaat nader op deze voorwaarde in.

Opgave. Pas dit procédé toe op de golfvergelijking in één dimensie en leid zo formule (2) van §1 af.

Opgave. Pas dit procédé toe op de golfvergelijking in drie dimensies

$$u_{tt} = \nabla^2 u \; u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

met gegeven kwadratisch integreerbare $u(x,y,z,0)$ en $u_y(x,y,z,0)$.

Opgave. Vind de oplossing van (1) bij $\varphi(x) = e^x$ (dus niet kwadratisch integreerbaar) en $\psi(x) = 0$.

Opgave. Laat zien dat voor de warmtegeleidingsvergelijking $u_t = u_{xx}$ zich het uitzonderingsgeval $q_1 = q_2$ voordoet. Vind een oplossing van deze vergelijking met slechts een randvoorwaarde $u(x,0) = \varphi(x)$.

Hoofdstuk II

DE POTENTIAALVERGELIJKING

1. Algemene beschouwingen.

Zowel de klassieke gravitatiepotentiaal als de electrostatische potentiaal voldoen aan de vergelijking van Poisson

$$\nabla^2 u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -4\pi\rho . \qquad (1)$$

ρ is de massadichtheid, resp. de ladingsdichtheid, en wordt als gegeven functie van x,y,z beschouwd. Dit is een lineaire elliptische vergelijking met constante coëfficienten en inhomogeen lid. Derhalve geldt: wanneer men één oplossing kent, kan elke andere gevonden worden door er bij op te tellen een oplossing van de homogene vergelijking

$$\nabla^2 u = 0. \qquad \text{(Laplace-vergelijking)} \qquad (2)$$

Eén oplossing van de inhomogene vergelijking is inderdaad bekend, namelijk de Coulomb-potentiaal

$$u^C(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,'. \qquad (3)$$

We bewijzen dat (3) inderdaad aan (1) voldoet door $\nabla^2 u^C$ te berekenen in drie stappen.

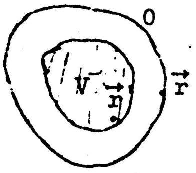
a. De functie 1/r bestaat en is differentieerbaar overal buiten de oorsprong; door expliciet uitrekenen vindt men $\nabla^2(1/r) = 0$. Derhalve ook voor vaste $\vec{r}\,'$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = 0 \qquad \text{voor } \vec{r} \neq \vec{r}\,'. \qquad (4)$$

Als ρ slechts in een begrensd gebied V van nul verschilt kan men $\nabla^2 u^C$ buiten V berekenen door eenvoudig onder het integraalteken te differentieren. Het resultaat is $\nabla^2 u^C = 0$,

zodat hier inderdaad aan (1) voldaan is.

b. Omsluit V door een oppervlak 0 dat nergens V raakt (zie figuur).



Dan geldt voor elke $\vec{r}$ op 0

$$\nabla u^G(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'\, \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,.$$

Integreer de normale component hiervan over 0:

$$\oint_0 \nabla u^G . d\vec{o} = \int_V \rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,' \oint_0 d\vec{o}.\, \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,.$$

Om de laatste integraal te berekenen merken we op dat hij niet van de keuze van 0 afhangt, daar volgens (4) de divergentie van het vectorveld $\nabla|\vec{r}-\vec{r}\,'|^{-1}$ nul is in elk punt $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$. Kiest men voor 0 een bol met voldoend grote straal en middelpunt $\vec{r}\,'$, dan blijkt onmiddellijk dat deze integraal gelijk is aan -4π. Dus voor elke 0

$$\oint_0 \nabla u^G . d\vec{o} = -4\pi \oint_V \rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'\,.$$

Op dezelfde manier ziet men dat elke ladingsverdeling buiten 0 niet tot de oppervlakte-integraal bijdraagt.

c. In deze formule kan men zonder bezwaar 0 samentrekken tot op de rand van V, zodat zij nu voor elk volume V met rand 0 geldt. Door toepassen van de stelling van Gauss op het linkerlid komt er

$$\int_V \nabla^2 u^G\, d^3\vec{r} = -\,4\pi \int_V \rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'.$$

Omdat dit geldt voor elke V moet $\nabla^2 u^G = -4\pi\rho$ zijn q.e.d.

<u>Opgave 1.</u> Bereken de gravitatie-potentiaal $u^G(r)$ van een homogene bol.

<u>Opgave 2.</u> Leid uit (3) af

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}) \qquad (5)$$

en omgekeerd. Deze formule vat dus het zojuist bewezen resultaat samen.

Opgave 3. Bewijs $\nabla^2 u^C = -4\pi\rho$ op de volgende manier. Eerst merkt men op dat alleen de onmiddellijke omgeving van $\vec{r}$ bijdraagt tot $\nabla^2 u^C(\vec{r})$. In die omgeving mag $\rho(\vec{r})$ door een constante voor het integraalteken vervangen worden. Als men voor die omgeving een bolletje kiest kan de integraal vervolgens expliciet berekend worden.

De Coulomb-potentiaal is een oplossing van (1) met als randvoorwaarde dat hij nul is in het oneindige. We zullen zien dat het de enige oplossing bij deze randvoorwaarde is. Voor de gravitatie is dat de enige randvoorwaarde die voorkomt, zodat het gravitatie-probleem is opgelost. In de electrostatica treden andere randvoorwaarden op, wanneer er geleiders zijn. Het probleem is dan om een oplossing van de homogene vergelijking te vinden, zodanig dat de som van beide aan de gestelde randvoorwaarden voldoet.

Opgave 4. Vind de potentiaal van een puntlading in het middelpunt van een geleidende, geaarde bol.

Opgave 5. Dito voor een dipool in het middelpunt van de bol.

Het probleem concentreert zich dus op oplossingen van de homogene Laplace-vergelijking (2). Functies die hieraan voldoen heten harmonische functies. In het geval van twee variabelen x,y kan men harmonische functies construeren door eenvoudig het reële deel te nemen van een willekeurige analytische functie van x + iy. Dit feit is een belangrijk hulpmiddel bij het oplossen van twee-dimensionale potentiaalproblemen, zie § 8. Harmonische functies van drie variabelen zijn een soort van uitbreiding van analytische functies.

We geven enige algemene eigenschappen.

Stelling. Als u harmonisch is, is zijn gemiddelde over een boloppervlak gelijk aan de waarde van de functie in het middelpunt. — Voor het bewijs nemen we een bol met straal r om de oorsprong; het gemiddelde is dan

$$\bar{u}(r) = \frac{1}{4\pi} \iint u(r,\vartheta\ \varphi)\ \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi.$$

Differentiëren naar r geeft

$$\frac{d\bar{u}(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial u}{\partial r} \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi = \frac{1}{4\pi r^2} \oint (\text{grad } u).do$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int \text{div grad } u\ d^3r = 0.$$

Dus $\bar{u}$ is onafhankelijk van r en daarom gelijk aan $\bar{u}(0) = u(0,0,0)$.

Opgave 6. Bewijs dat de potentiële energie van een bolsymmetrische planeet in een uitwendig gravitatie-veld gelijk is aan de energie die men zou krijgen als de totale massa in het middelpunt geconcentreerd was.

Opgave 7. Voor elke functie u die in een Taylorreeks ontwikkeld kan worden geldt

$$\bar{u}(r) = \bar{u}(0) + \frac{1}{3} r^2 \left[\nabla^2 u\right]_{r=o} + 0(r^4).$$

Bewijs dit, en concludeer dat het omgekeerde van bovenstaande stelling ook geldt.

Stelling. Als u harmonisch is in een gebied G, dan heeft u geen maximum of minimum binnen G. — Het bewijs volgt direct uit de voorgaande stelling.

Opgave 8. Concludeer hieruit dat het potentiaalprobleem in een gesloten gebied met gegeven waarden op de rand niet meer dan een oplossing toelaat, en dat, indien er een oplossing bestaat, deze zeker continu van de randwaarden afhangt.

Opgave 9. Een harmonische functie in de hele ruimte die nul is in het oneindige is overal nul. De Coulomb-potentiaal (3) is de enige oplossing van (1) bij de randvoorwaarde $u(\infty) = 0$.

Opgave 10. Een puntlading in een electrostatisch veld heeft geen stabiele evenwichtspositie, ook niet als er bovendien nog de zwaartekracht op werkt. Hoe valt dit te rijmen met de proef van Millikan?

Opgave 11. Laat zien dat de tweede-graadstermen in de Taylor-ontwikkeling van een harmonische functie geen positief-definiete of negatief-definiete vorm kunnen zijn

Opgave 12. De positie van een star lichaam in de ruimte kan gegeven worden door de plaatsvector $\vec{a}$ van een van zijn punten. Een vaste ladingsverdeling ρ_0 in het lichaam veroorzaakt dus een ladingsverdeling $\rho(r) = \rho_0(\vec{r}-\vec{a})$ in de ruimte. De electrostatische energie van het lichaam in een potentiaal u is

$$W(\vec{a}) = \int \rho_0(\vec{r})\ u(\vec{r}+\vec{a})\ d^3\vec{r}.$$

Bewijs dat het lichaam geen stabiele evenwichtspositie heeft door een stelling aangaande het gemiddelde van $W(\vec{a})$ over een boloppervlak af te leiden. Bestaat er een oriëntatie die stabiel is t.a.v. draaiingen?

Stelling. Als $u(x,y,z)$ harmonisch is, is

$$v(x,y,z) = \frac{1}{r}\, u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) \tag{6}$$

ook harmonisch. —— Deze transformatie heet inversie en wordt bewezen door expliciet uitrekenen, het gemakkelijkst

in poolcoördinaten.

Opgave 13. Gebruik dit om het vroeger gevonden potentiaalveld van een dipool in een bol te transformeren in een oplossing van de Laplace-vergelijking buiten de bol. Welke physische situatie wordt door deze nieuwe oplossing beschreven?

Opgave 14. Beeld door inversie het inwendige van een bol af op de halfruimte $z > 0$. Laat zien dat het oplossen van de Laplace-vergelijking met gegeven randwaarden voor het inwendige van een bol equivalent is met hetzelfde probleem voor een halfruimte, mits men hieraan toevoegt dat de potentiaal in het oneindige nul moet zijn.

Opgave 15. Welke oplossing in de halfruimte ontstaat door inversie uit de triviale oplossing in de bol $u = \text{constant}$?

Opgave 16. Laat zien dat als $u(\vec{r})$ harmonisch is, de volgende functies ook harmonisch zijn: $v(\vec{r}) = u(\vec{r}+\vec{a})$ met constante translatievector $\vec{a}$; $v(\vec{r}) = u(O\vec{r})$ met orthogonale draaiingsmatrix O; en $v(\vec{r}) = \alpha u(\beta\vec{r})$ met constante schaalfactoren α,β.

Opgave 17. In de aarde wordt door radio-actief verval warmte geproduceerd, zeg $q(\vec{r})$ per cc per sec. Laat zien dat de stationaire temperatuurverdeling binnen de aarde aan de Poisson-vergelijking voldoet.

Opgave 18. Stel dat de warmte-productie $q(\vec{r})$ constant is voor $0 < r < R_1$ en nul daarbuiten, en dat de randvoorwaarde luidt dat de temperatuur 0 is op het aardoppervlak: $r = R_2 > R_1$. Bereken de temperatuurverdeling.

2. Oplossingen van de Laplace-vergelijking.

Het is niet moeilijk een stel oplossingen te construeren. Merk op dat de Laplace-vergelijking lineair is met

constante coëfficiënten, en daarom oplossingen van de gedaante

$$u(x,y,z) = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}$$

moet hebben. Inderdaad is dit een oplossing voor al die waarden van de constanten α,β,γ die voldoen aan

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

De algemeenste oplossing die men zo krijgt is een lineaire superpositie, waarbij alle complexe waarden voor α en β toegelaten kunnen worden. Het werkelijke probleem is echter om die superpositie zo te kiezen dat aan de randvoorwaarden voldaan is.

De hier geconstrueerde oplossingen zijn aangepast aan een rechthoekige geometrie, d.w.z. aan gevallen waar de randen worden gevormd door vlakken evenwijdig aan de coördinaatvlakken. Stel dat gevraagd wordt u te bepalen in de halfruimte $z > 0$ met gegeven randwaarden op $z = 0$ en de eis dat $u(\infty) = 0$. Verondersteld wordt dat de randwaarden $u(x,y,0)$ ook tot nul naderen op grote afstand.

Om de algemene oplossing hiervoor geschikt te maken merkt men eerst op dat $e^{\alpha x}$ oneindig wordt voor $x \to +\infty$ of voor $x \to -\infty$, tenzij α zuiver imaginair is. We zetten daarom $\alpha = ik$ en laten in de superpositie alleen reële waarden van k toe. Dito is $\beta = il$ met reële l. Dan wordt $\gamma = \pm \sqrt{k^2+l^2}$; omdat u nul moet worden voor $z \to +\infty$, kan alleen $\gamma = -\sqrt{k^2+l^2}$ worden toegelaten. Dus moet u de gedaante hebben

$$u(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(k,l)\, e^{ikx+ily-z\sqrt{k^2+l^2}}\, dkdl.$$

Door $z = 0$ in te vullen vindt men hoe $A(k,l)$ gekozen moet worden om de gegeven randwaarden op te leveren

$$u(x,y,0) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(k,l)\, e^{ikx+ily}\, dkdl.$$

Hieruit volgt een en slechts een mogelijke A:

$$A(k,l) = (2\pi)^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} u(x,y,0)\, e^{ikx+ily}\, dxdy.$$

Daarmee is het onderhavige randwaarde-probleem opgelost.

Door deze A in te vullen verkrijgt men de oplossing expliciet uitgedrukt in de randwaarden

$$u(x,y,z) = \iint K_z(x,y|x',y')\, u(x',y',0)\, dx'dy'$$

waarin de integraalkern K gelijk is aan

$$K_z(x,y|x',y') = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')+il(y-y')-z\sqrt{k^2+l^2}}\, dkdl.$$

In dit geval is het zelfs mogelijk deze integraal te berekenen:

$$K_z(x,y|x',y') = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{[x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}} .$$

De oplossing kan dus elementair in de randwaarden worden uitgedrukt

$$u(x,y,z) = \frac{z}{2\pi} \iint [(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{-\frac{3}{2}}\, u(x',y',0)\, dx'dy'. \qquad (7)$$

Opgave 19. Verklaar dit resultaat door op te merken dat de gegeven randwaarde u(x,y,0) verkregen kan worden door een electrische dipoollaag $u(x,y,0)/2\pi$ op het xy-vlak aan te brengen.

Opgave 20. Waarom konden we onbekommerd complexe functies gebruiken zonder bang te zijn dat het eindresultaat niet reëel zou zijn?

Opgave 21. Vind op bovenstaande manier de potentiaal voor $z > 0$ als op de rand $z = 0$ gegeven is de normale afgeleide $u_z(x,y,0)$. Verklaar het resultaat weer in electrostatische termen.

Opgave 22. Vind de potentiaal in het gebied $0 < z < c$, wanneer gegeven is $u(x,y,0)$ en tevens $u(x,y,c) = 0$. (Aanwijzing: nu doen wel de positieve waarden van γ mee, maar ze moeten zo gecombineerd worden met de overeenkomstige negatieve γ dat aan de voorwaarde bij $z = c$ voldaan is.)

Opgave 23. Vind de potentiaal in een rechthoekige doos ($0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$) als u op het grondvlak een gegeven functie is en op alle andere wanden gelijk nul is. (Aanwijzing: nu moeten ook de oplossing met e^{ikx} en e^{-ikx} zo gecombineerd worden dat ze voor $x = 0$ en $x = a$ samen nul opleveren.)

Opgave 24. Vind de potentiaal in een rechthoekige doos met voorgeschreven randwaarden op alle wanden. (Aanwijzing: gebruik het resultaat van de vorige opgave.)

Opgave 25. Laat zien dat de operatoren K_z een commutatieve semigroep vormen:

$$K_{z_1} K_{z_2} = K_{z_1+z_2} \qquad (z_1, z_2 \geq 0); \qquad K_0 = 1.$$

Waarom vormen ze geen groep?

Men kan een tweede stel oplossingen construeren in de vorm van polynomen in x,y,z. Laat $H_l(x,y,z)$ een homogeen polynoom van de graad l zijn. Men gaat gemakkelijk na dat het aantal coefficienten $\frac{1}{2}(l+1)(l+2)$ is. Dan is $\nabla^2 H_l$ een homogeen polynoom van de graad $l-2$ en bevat dus $\frac{1}{2}l(l-1)$ coefficienten. De eis dat die allemaal nul zijn legt $\frac{1}{2}l(l-1)$ voorwaarden aan de coefficienten van H_l op, zodat er nog $2l+1$ coefficienten in H_l vrij gekozen kunnen worden. Er bestaan dus $2l+1$ onafhankelijke harmonische homogene polynomen van de graad l.

Uit deze rij oplossingen kan men een andere vinden door er inversie op toe te passen. Tenslotte kan men alle verkregen oplossingen lineair combineren. Zo is wel een zeer algemene oplossing verkregen, maar het voornaamste probleem

is weer het aanpassen van de gegeven randvoorwaarden.

Opmerking. De oplossingen $\frac{1}{r} H_l\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$ zijn homogeen van de graad $-(l+1)$ en heten monopoolveld ($l=0$, Coulomb) dipoolveld ($l=1$), quadrupoolveld ($l=2$), en in het algemeen 2^l-poolveld.

Opgave 26. Als u een harmonische functie is, zijn u_x, u_y, u_z en hogere afgeleiden ook harmonisch. Overtuig u ervan, dat deze bewerking toegepast op bovenvermelde oplossingen geen nieuwe oplevert.

Opgave 27. Laat zien dat alle bovenvermelde oplossingen gevonden kunnen worden door differentiëren van de Coulomb-potentiaal.

Een manier om $2l+1$ onafhankelijke harmonische homogene polynomen van de graad l te kiezen wordt verschaft door de bolfuncties $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ (zie de Appendix van Deel I).*) Inderdaad, de functies $r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ voldoen aan de Laplace-vergelijking, zijn homogene polynomen van de graad l in x,y,z, en voor elke l zijn er $2l+1$ onafhankelijke. Inversie levert de oplossingen $r^{-l-1}\ Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ van de Laplace-vergelijking.

De hier geconstrueerde oplossingen zijn geschikt voor problemen waarbij de rand uit een bol bestaat. Als voorbeeld lossen we de Laplace-vergelijking op in de bol met straal R met gegeven randwaarde $f(\vartheta,\varphi)$, dus $u(R,\vartheta,\varphi) = f(\vartheta,\varphi)$. We zoeken een lineaire combinatie van de geconstrueerde harmonische functies die aan deze randvoorwaarde voldoet.

*) Natuurlijk is dit niet de enige mogelijke keuze, maar wel is er een systematische behandeling die tot deze keuze leidt; zie H.A. Kramers, Quantum Mechanics, blz. 171.

Merk eerst op dat de oplossingen $r^{-l-1}\,Y_{lm}$ niet in de lineaire combinatie kunnen voorkomen, omdat onze oplossing regulier in de oorsprong moet zijn. Dus hij is van de gedaante

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm}\, r^l\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi).$$

De constanten A_{lm} moeten nu zo gekozen worden dat

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} R^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = f(\vartheta,\varphi).$$

Volgens de ontwikkelingsstelling van de Y_{lm} is het inderdaad voor vrijwel elke functie U mogelijk zulke constanten te vinden; wegens de orthogonaliteit der Y_{lm} worden die constanten eenvoudig gegeven door

$$A_{lm}R^l = \iint Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)\; U(\vartheta,\varphi)\; \sin\vartheta\; d\vartheta\; d\varphi\,.$$

Hiermee zijn de A_{lm} gevonden en is het probleem dus opgelost.

Door deze A in te vullen vindt men u in de gedaante

$$u(r,\vartheta,\varphi) = \iint K_r(\vartheta,\varphi|\vartheta',\varphi')\; u(R,\vartheta',\varphi')\; \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi' \qquad (8)$$

waarin de integraalkern K gelijk is aan

$$K_r(\vartheta,\varphi|\vartheta',\varphi') = \sum_{l,m} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\; Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi'). \qquad (9)$$

De oplossing u wordt dus verkregen door deze van r afhankelijke integraaloperator op de gegeven randwaarde toe te passen.

Opgave 28. Controleer dat de gevonden oplossing aan de gestelde eisen voldoet.

Opgave 29. Bewijs dat $r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ inderdaad een homogeen polynoom van de graad l in x,y,z is.

Opgave 30. Los de Laplace-vergelijking op in het gebied buiten de bol, met gegeven randwaarden op de bol en de eis $u(\infty) = 0$. Vind de bijbehorende integraalkern.

Opgave 31. Los de Laplace-vergelijking op binnen de bol als de normale afgeleide van u op de bol gegeven is. Aan welke beperking moet de voorgeschreven normale afgeleide voldoen?

Opgave 32. Vind met behulp van (9) de potentiaal veroorzaakt door een puntlading in een willekeurig punt binnen een geleidende geaarde bol.

3. Randen met axiale symmetrie.

Een nieuw stel harmonische functies vindt men door de Laplace-vergelijking in cylindercoordinaten te schrijven (vgl. Deel I, Hoofdstuk VI, § 2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Hieraan voldoet, met twee constanten m en γ,

$$u(s,\varphi,z) = v(s)\, e^{im\varphi+\gamma z}$$

vermits v(s) een oplossing is van de gewone differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dv}{ds} + \left(\gamma^2 - \frac{m^2}{s^2}\right) v = 0.$$

Deze tweede-orde differentiaalvergelijking heeft natuurlijk twee onafhankelijke oplossingen, maar slechts een ervan is eindig voor s = 0, namelijk de "Bessel-functie van de orde m" (zie Deel I, Hoofdstuk II, § 1):

$$J_m(\gamma s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu!\,\Gamma(\mu+m+1)}\left(\frac{\gamma s}{2}\right)^{2\mu+m} .$$

Zo hebben we dus een derde stel oplossingen gevonden

$$u(s,\varphi,z) = J_m(\gamma s)\ e^{im\varphi+\gamma z}\ . \qquad (10)$$

De randvoorwaarden zullen weer beperkingen opleggen aan de toelaatbare waarden van m en γ. Zo zal m geheel moeten zijn, indien φ helemaal rond kan lopen en geëist wordt dat u eenduidig is. Bovendien kan het voorkomen dat de oplossing niet eindig hoeft te zijn voor s = 0; in dat geval moeten ook oplossingen met de Neumann-functie N_m op de plaats van de J_m worden toegelaten.

Opgave 33. Gevraagd de Laplace-vergelijking binnen een oneindige cylinder op te lossen met gegeven waarden op de cylindermantel.

Opgave 34. Los het Laplace-probleem op voor de halfruimte z > 0 met gegeven randwaarde op z = 0 met behulp van de methode in deze paragraaf. (Aanwijzing: gebruik de ontwikkelingsstelling voor Bessel-functies, belichaamd in de identiteit

$$\int_0^\infty J_m(\gamma s)\ J_m(\gamma' s)\ s\ ds = \gamma^{-1}\delta(\gamma-\gamma');$$

zie Hoofdstuk VI van Deel I.)

Opgave 35. Door het resultaat van de voorgaande opgave te vergelijken met de oplossing van hetzelfde probleem in § 2 vindt men de mathematische identiteit

$$\sum_m \int_0^\infty \gamma d\gamma\ J_m(\gamma s) J_m(\gamma s')\ e^{-\gamma z} e^{im(\varphi-\varphi')} = z\left[z^2+s^2+s'^2-2ss'\cos(\varphi-\varphi')\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Opgave 36. Los het Laplace-probleem op binnen een eindige cylinder met gegeven randwaarden op cylindermantel, bodem en deksel. (Aanwijzing: neem eerst de randwaarden nul op telkens twee van de drie wanden.)

De stromingstoestand van één vloeistof wordt beschreven door een locale stroomsnelheidsvector $\vec{v}(x,y,z,t)$. Als de vloeistof onsamendrukbaar is geldt div $\vec{v} = 0$. Als de stroming stationair is, is $\vec{v}$ onafhankelijk van t. De speciale stromingspatronen waarvoor rot $\vec{v} = 0$ is, om men dus kan zetten $\vec{v} = \nabla u$, heten irrotationele of potentiaalstroming. Zij zijn van belang omdat zij zelfs bij viskeuze vloeistoffen niet aan inwendige wrijving onderhevig zijn, doordat, ruw gezegd, elk vloeistofelementje ten opzichte van zijn omgeving rolt in plaats van schuift. De snelheidspotentiaal u voldoet blijkbaar aan

$$\nabla^2 u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{op wand.} \tag{11}$$

Bekijk de stroming door een rechte buis met cirkelvormige doorsnee met straal a. De oplossing (10) voldoet, mits γ zo gekozen wordt dat

$$J_m'(\gamma a) = 0.$$

Deze vergelijking heeft een rij reële nulpunten γ_n; de bijbehorende oplossingen zijn

$$u_{m,n} = \mathrm{Re}\, A\, J_m(\gamma_n s)\, e^{im\varphi+\gamma_n z},$$

waarin A een willekeurige complexe constante is.

Het eenvoudigste geval, waarbij de vloeistof als een massieve zuil door de buis beweegt, is hierin niet vervat. Immers daarvoor zou u onafhankelijk van φ moeten zijn (dus m = 0) en lineair van z moeten afhangen. Toch kan deze oplossing verkregen worden door eerst de bij $u_{o,n}$ behorende snelheidscomponenten te berekenen

$$v_s = \mathrm{Re}\, A\, \gamma_n J_o'(\gamma_n s)\, e^{\gamma_n z}$$

$$v_\varphi = 0$$

$$v_z = \mathrm{Re}\, A\, \gamma_n J_o(\gamma_n s)\, e^{\gamma_n z}$$

en pas daarna $\gamma_n = 0$ in te vullen:

$$v_s = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = \text{const.}$$

Opgave 37. Bewijs dat $J'_m(z) = 0$ alleen reële nulpunten heeft (Vergelijk Deel I, blz. VI,9), en dat voor $m = 0$ inderdaad $z = 0$ een wortel is.

Opgave 38. Schets het stromingspatroon behorende bij de algemene oplossing $u_{m,n}$.

Opgave 39. Vind de mogelijke stationaire onsamendrukbare potentiaalstromingen in een ronde buis die aan een zijde afgesloten is: $0 < s < a$, $z > 0$.

Opgave 40. Behandel de stroming door een buis met rechthoekige doorsnee.

Opgave 41. Stel dat binnen een geleider de wet van Ohm geldt: $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, met constant geleidingsvermogen σ. Laat zien dat voor een stationaire toestand de electrostatische potentiaal u voldoet aan (11).

Als voorbeeld van een nieuw soort randvoorwaarden beschouwen we een oneindig dunne geleidende schijf, geïsoleerd opgehangen met een zekere electrische lading en derhalve een constante van nul verschillende electrische potentiaal U. De vraag is nu de Laplace-vergelijking in de hele ruimte op te lossen met voorwaarde

$$u(s,\varphi,0) = U \quad \text{voor} \quad s < a; \qquad u(\infty) = 0.$$

Wegens de symmetrie is dit equivalent met het vinden van u voor $z > 0$ en randvoorwaarde

$$u(s,\varphi,0) = U \quad (s < a)\ ; \qquad u_z(s,\varphi,0) = 0 \quad (s > a).$$

Dus op een gedeelte van de rand is u gegeven, op de rest is u_z gegeven. Zulke "gemengde randvoorwaarden" zijn aanzienlijk moeilijker te behandelen dan het probleem waarbij hetzij u, hetzij u_z gegeven is over het hele vlak. Toch kan

het onderhevige probleem opgelost worden, al zullen we de oplossing niet systematisch deduceren.

Het is duidelijk dat u niet van φ afhangt en dus de volgende gedaante moet hebben voor $z > 0$,

$$u(s,z) = \int_0^\infty A(\gamma)\, J_o(\gamma s)\, e^{-\gamma z}\, d\gamma.$$

Daaruit volgt

$$u_z(s,0) = -\int_0^\infty \gamma\, A(\gamma)\, J_o(\gamma s)\, d\gamma\ .$$

Dit moet nul zijn voor $s > a$. Inderdaad is het mogelijk een $A(\gamma)$ aan te geven, waarvoor hieraan voldaan is, want het is bekend dat de volgende mathematische identiteit geldt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin a\gamma\, J_o(s\gamma)\, d\gamma &= 0 && \text{voor } s > a \\ &= (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}} && \text{voor } s < a. \end{aligned}$$

Een tweede identiteit zullen we ook nodig hebben

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos a\gamma\, J_o(s\gamma)\, d\gamma &= (s^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} && \text{voor } s > a \\ &= 0 && \text{voor } s < a. \end{aligned}$$

De eerste identiteit suggereert dat men moet zetten $\gamma A(\gamma) = c \sin a\gamma$, zodat dan

$$u(s,z) = c\int_0^\infty \frac{\sin a\gamma}{\gamma}\, J_o(s\gamma)\, e^{-\gamma z}\, d\gamma.$$

Maar we moeten nagaan of ook aan de eis $u(s<a,0) = U$ voldaan is. Daartoe berekenen we

$$\begin{aligned} u(s,0) &= c\int_0^\infty \frac{\sin a\gamma}{\gamma}\, J_o(s\gamma)\, d\gamma \\ &= c\int_0^a d\alpha \int_0^\infty \cos \alpha\gamma\, J_o(s\gamma)\, d\gamma \\ &= c\int_0^s d\alpha\, (s^2-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = c\,\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Inderdaad blijkt onze gok goed geweest te zijn als men kiest $c = 2U/\pi$.

Opgave 42. Toon aan dat de capaciteit van de schijf gelijk is aan $2a/\pi$.

Opgave 43. Bewijs de gebruikte identiteiten. (Aanwijzing: leid eerst af voor $\mathrm{Re}\,\sigma > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\sigma\gamma}\, J_0(s\gamma)\, d\gamma = (s^2 + \sigma^2)^{-\frac{1}{2}} ,$$

en laat dan σ naar de imaginaire as naderen.)

4. Het variatieprincipe.

Tot nu toe hebben we ons beijverd om voor speciale eenvoudige geometrieën min of meer expliciete oplossingen te construeren. We zullen nu meer algemene vormen beschouwen, maar omdat we niet kunnen hopen daarvoor ook expliciete oplossingen te vinden, moeten we ons met algemene overwegingen tevreden stellen.

Laat V een begrensd gebied zijn met rand O; gezocht wordt een functie u die binnen V aan de Laplace-vergelijking voldoet en op O voorgeschreven randwaarden aanneemt. Bekijk de verzameling van alle reële functies v, die gedefinieerd en continu zijn in V+O, continue tweede afgeleiden hebben in V, en op O de voorgeschreven randwaarden aannemen. De integraal

$$I\,[v] = \tfrac{1}{2}\int_V (v_v^2 + v_y^2 + v_z^2)\; d^3\vec{r} = \tfrac{1}{2}\int_V (\vec{\nabla} v)^2\; d^3\vec{r}$$

is een functionaal van v. Klaarblijkelijk heeft I[v] een onderste grens ≥ 0. Als die onderste grens bereikt wordt bij een bepaalde keuze van v, zeg v = u, dan heeft u natuurlijk de gegeven randwaarden, en we zullen laten zien dat u aan de Laplace-vergelijking voldoet.

Voor elke v geldt $I[v] \geq I[u]$. Neem $v = u + \varepsilon w$, waar w wederom een willekeurige functie is, behalve dat $w = 0$ op de rand omdat zowel v als u daar de gegeven randwaarden aannemen. Men heeft nu

$$I[v] = I[u] + \varepsilon^2 I[w] + \varepsilon \int_V \vec{\nabla} u . \vec{\nabla} w \, d^3\vec{r}.$$

Omdat $I[v] \geq I[u]$ is voor elke ε moet de lineaire term in ε nul zijn .

$$0 = \int_V \vec{\nabla} u . \vec{\nabla} w \, d^3\vec{r} = \oint_O w \, \vec{\nabla} u . do - \int_V w \, \vec{\nabla}^2 u \, d^3\vec{r} .$$

De integraal over O is nul omdat w=0 op O, dus geldt

$$\int w \, \nabla^2 u \, d^3\vec{r} = 0$$

voor elke functie w. Daaruit volgt $\nabla^2 u = 0$.

We hebben gevonden dat de functie, waarvoor de functionaal I zijn minimum-waarde aanneemt, de oplossing van het Laplace-probleem met gegeven randwaarden vormt. Jarenlang heeft dit als existentie-bewijs gegolden, totdat men de lacune ontdekte: het is niet bewezen dat er inderdaad een functie bestaat waarvoor I zijn ondergrens bereikt. Het bewijs kan echter wel gecompleteerd worden, maar voor ons is dat van weinig belang.*) Van groot belang is echter het algemene idee van een variatieprincipe: namelijk dat de oplossing van een differentiaalvergelijking in vele gevallen identiek is met de functie die een geschikt gekozen integraal minimaal maakt. Dergelijke variatieprincipes komen in de natuurkunde veel voor, bijvoorbeeld in de klassieke mechanica en in de quantummechanica (zie Deel II, Hoofdstuk IV). Meestal is het niet nodig dat de te variëren integraal I werkelijk een minimum aanneemt, maar is het voldoende dat

*) Zie bijv.: Courant-Hilbert II, Hoofdstuk VII.

hij voor kleine veranderingen in eerste orde stationair is. Deze voorwaarde schrijft men gewoonlijk

$$\delta I[u] \equiv I[u+\delta u] - I[u] = 0.$$

Het is geenszins noodzakelijk dat V een enkelvoudig samenhangend gebied met enkelvoudig samenhangende rand O is. Er mogen verscheidene geleiders zijn en ze mogen ringvormig zijn, enzovoorts. Verder mag V zich tot het oneindige uitstrekken; de randvoorwaarde in het oneindige neemt dan de gedaante aan van een voorwaarde voor het asymptotische gedrag van u op grote afstand. Een alternatieve manier om een oneindige V te behandelen bestaat eruit dat men het eerst door inversie op een eindig gebied afbeeldt.

Opgave 44. Laat zien dat de integraal, die geminimaliseerd moet worden, de energie van het electrostatische veld voorstelt.

Opgave 45. Laat zien dat de Poisson-vergelijking overeenkomt met het variatieprobleem

$$\delta \int \left\{ \frac{1}{8\pi} (\nabla u)^2 - \rho u \right\} d^3\vec{r} = 0.$$

(Merk op, dat de integraal gelijk is aan de veldenergie minus de potentiële energie van de ladingen ρ. Bedenk dat in het variatieprincipe van Hamilton in de klassieke mechanica ook de integraal van de kinetische minus de potentiële energie optreedt.)

Tot dusver hebben we behandeld het "probleem van Dirichlet": vind een harmonische functie u in V met gegeven randwaarde $u = f$ op O. Het "probleem van Neumann" luidt: vind een harmonische functie u in V met gegeven normale afgeleide $\partial u/\partial n = g$ op O. Omdat voor elke harmonische functie geldt

$$\oint \frac{\partial u}{\partial n}\, do = \int \nabla^2 u \, d^3 r = 0$$

is het probleem van Neumann niet oplosbaar tenzij men voor g alleen functies op 0 toelaat die voldoen aan

$$\oint g \, do = 0. \tag{12}$$

Anderzijds is het evident dat zodra er een oplossing is, er oneindig veel zijn, omdat men er een willekeurige constante bij mag optellen. Op physische gronden verwacht men dat afgezien van deze twee beperkingen, het probleem van Neumann goed gesteld is.

Het overeenkomstige variatieprobleem krijgt men door te zetten

$$I[u] = \tfrac{1}{2} \int_V (\nabla u)^2 \, d^3 r - \oint_0 g \, u \, do,$$

en te eisen $\delta I = 0$ voor alle δu (zonder bijvoorwaarde). Immers

$$\delta I = - \int_V \nabla^2 u \, \delta u \, d^3 r + \oint_0 \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) \delta u \, do$$

is nul voor alle δu dan en slechts dan als

$$\nabla^2 u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g.$$

<u>Opgave 46</u>. Geef een physische toepassing van het probleem van Neumann. Wat is daarbij de interpretatie van de voorwaarde (12)?

<u>Opgave 47</u>. Een half-oneindige cylinder ($s < a$, $z > 0$) heeft in de bodem ($s < a$, $z = 0$) een zeer kleine opening, waardoor water naar binnen stroomt met constante snelheid. Als zich een stationaire potentiaalstroming instelt, door welke vergelijking met randvoorwaarden wordt die beschreven en wat is het corresponderende variatie-principe? Los het geformuleerde probleem op.

Opgave 48. Formuleer het variatie-principe dat correspondeert met de Laplace-vergelijking met randvoorwaarde

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = g,$$

waarin h,g gegeven functies op O zijn.

De warmtegeleiding in een inhomogeen medium V met soortelijke warmte $c(\vec{r})$ en warmtegeleidingsvermogen $\lambda(\vec{r})$ voldoet aan de vergelijking

$$c\,\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{\nabla}.\lambda\vec{\nabla}u.$$

Let op dat c en λ wel van de plaats, maar niet van u mogen afhangen, zodat de vergelijking lineair is. De stationaire temperatuurverdeling onder invloed van een gegeven oppervlakte-temperatuur f wordt gevonden uit het randwaardeprobleem

$$\vec{\nabla}.\lambda\vec{\nabla}u = 0, \qquad u = f \quad \text{op} \quad O.$$

Het corresponderende variatieprobleem is

$$\delta \int_V \lambda(\nabla u)^2\, d^3r = 0 \quad \text{met} \quad \delta u = 0 \quad \text{op} \quad O. \tag{13}$$

We willen aantonen dat dit overeenkomt met het minimaliseren van de entropie die door het irreversibele warmtegeleidingsproces wordt geproduceerd.

Laat T de absolute temperatuur zijn in een punt $\vec{r}$ van het medium, en T_0 een vast punt op de temperatuurschaal, bijv. 0° C. Dan is $u = T - T_0$ een experimentele temperatuur die later klein vergeleken bij T_0 verondersteld zal worden. De entropie van een volume-eenheid van het medium in het punt $\vec{r}$ is een functie van T alleen met een willekeurige constante; die mag zo gekozen worden dat de entropie 0 is voor $T = T_0$. De entropie per volume-eenheid is dan

$$\int_{T_0}^{T} \frac{c}{T'}\, dT' = c \log \frac{T}{T_0}.$$

De entropie van het hele medium is een functionaal van u,

$$S[u] = \int_V c \log \frac{T}{T_0}\, d^3\vec{r}.$$

De toename met de tijd is

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{c}{T} \frac{\partial u}{\partial t}\, d^3\vec{r}$$

$$= \int_V \frac{1}{T}\, \nabla . \lambda \nabla u \, d^3\vec{r}$$

$$= \oint_O \frac{\lambda}{T} \nabla u . do - \int_V \lambda\, \nabla \left(\frac{1}{T}\right) . \nabla u \, d^3\vec{r}.$$

De oppervlakte-term stelt kennelijk de entropie-toename voor tengevolge van de warmte die door O naar binnen stroomt.

De tweede term is de productie van entropie door de irreversibele warmtegeleiding in het medium. Ontwikkel naar u en breek af na de kwadratische term,

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{\text{irreversibel}} = \frac{1}{T_0^2} \int_V \lambda (\nabla u)^2\, d^3\vec{r} + O(u/T_0)^3.$$

Weliswaar hebben we, om dit te vinden, gebruik gemaakt van de warmtegeleidingsvergelijking zelf, maar we kunnen nu algemeen concluderen dat de entropie-productie tengevolge van warmtegeleiding gelijk is aan $\lambda(\nabla u)^2/T_0^2$ per volume-eenheid. Het variatie-principe (13) komt dus neer op het zoeken van die temperatuurverdeling, die aan de gestelde randwaarden voldoet en de irreversibele entropie-productie minimaal maakt. Dat is de temperatuurverdeling die zich in een stationaire toestand instelt.

Opgave 49. Laat zien dat dit inderdaad een minimum is.

Opgave 50. Laat zien dat het resultaat ook nog geldt als c en λ van u afhangen (al geldt het variatie-principe dan niet meer).

5. De formules van Green.

Voor elk tweetal voldoende differentieerbare functies u,v geldt volgens de formule van Gauss

$$\int_V v\nabla^2 u \, d^3r = \oint_O v\nabla u.do - \int_V \nabla v.\nabla u \, d^3r, \tag{14}$$

als V een drie-dimensionaal gebied is, omsloten door het oppervlak O. Door v = u te nemen vindt men de eerste formule van Green

$$\int_V u\nabla^2 u \, d^3r = \oint_O u\nabla u.do - \int_V (\nabla u)^2 \, d^3r. \tag{15}$$

Deze wordt gebruikt om de eenduidigheid van de oplossingen te bewijzen: als u_1 en u_2 beide aan Laplace voldoen en op O dezelfde waarden hebben, voldoet u_1-u_2 aan Laplace en is nul op O. Pas (15) toe op $u = u_1-u_2$; de eerste twee termen zijn nul, dus $\nabla u = 0$, waaruit volgt u = constant, en dus nul. Dit resultaat is al in de vorige paragraaf gevonden, maar uit (15) volgt ook eenduidigheid als op O niet u zelf, maar de afgeleide in de richting van de normaal is gegeven.

Opgave 51. Bewijs dat twee functies die harmonisch zijn in V en op O dezelfde normale afgeleide hebben, gelijk zijn op een constante na.

Opgave 52. Bewijs uit (15) dat een harmonische functie die voor $r \to \infty$ van de orde r^{-1} is, terwijl zijn afgeleiden van de orde r^{-2} zijn, overal nul is. (Dit resultaat is zwak-

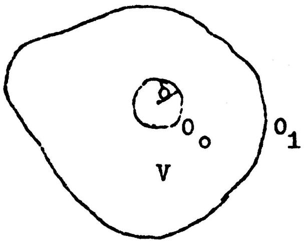
ker dan dat in § 1.)

De <u>tweede formule van Green</u> wordt verkregen door in (14) u en v te verwisselen en af te trekken:

$$\int_V (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\, d^3\vec{r} = \oint_O (v\vec{\nabla} u - u\vec{\nabla} v).\, d\vec{o}. \qquad (16)$$

Die zal in de eerste plaats gebruikt worden om een andere formule af te leiden.

Daartoe nemen we een willekeurig punt r_o, kiezen voor O een oppervlak O_1 op grote afstand, en een bolletje O_o met straal δ om r_o; het gebied V is de ruimte tussen O_o en O_1, zie figuur. Voor v kiezen we $|r-r_o|^{-1}$, hetgeen een harmonische functie in V is. Dan geeft (14)



$$\int_V \frac{\nabla^2 u}{|r-r_o|}\, d^3r = \oint_{O_1} \left\{ \frac{1}{|r-r_o|}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|r-r_o|} \right\} do$$

$$- \oint_{O_o} \left\{ \frac{1}{\delta}\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{u}{\delta^2} \right\} do.$$

In de laatste integraal wijst de normaal naar binnen, dus $\partial/\partial n = -\partial/\partial|r-r_o|$. Laat nu δ naar 0 naderen, dan krijgt deze integraal de waarde $-4\pi u(r_o)$. Dus geldt voor elke voldoend differentieerbare functie u de identiteit

$$4\pi u(r_o) = -\int_V \frac{\nabla^2 u(r)}{|r-r_o|}\, d^3r + \oint_O \left\{ \frac{1}{|r-r_o|}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|r-r_o|} \right\} do, \qquad (17)$$

waarbij $\vec{r}_o$ een willekeurig punt in het gebied V omsloten door O is.

Opgave 53. Bewijs dat als r_0 buiten V ligt het rechterlid nul is.

Opgave 54. Controleer (17) voor het geval
$u = x^2+y^2+z^2$, $\vec{r}_0 = 0$, V = bol om de oorsprong.

Opgave 55. Leid (17) af uit (16) met behulp van (5). (Aanwijzing: omdat (5) in de hele ruimte geldt hoeft geen bolletje meer aangebracht te worden om $\vec{r}_0$ uit te sluiten.)

Als u harmonisch is, valt de eerste term van het rechterlid weg. Dan drukt (17) de waarden van u binnen V uit in de waarden van u en $\partial u/\partial n$ op de rand. Dit resultaat is analoog aan de Cauchy-integraal voor analytische functies. In het bijzonder volgt eruit dat elke harmonische functie oneindig vaak differentieerbaar is, en in een machtreeks ontwikkeld kan worden.

Opgave 56. Bewijs dit. (Aanwijzing: analoog aan het bewijs voor analytische functies.)

Opgave 57. Waarom vormt (17) geen algemene oplossing van het randwaarde-probleem van de electrostatica?

Opgave 58. Leid uit (17) weer de stelling in § 1 over het gemiddelde van harmonische functies af.

Opgave 59. Bewijs voor het gemiddelde van een willekeurige functie over een boloppervlak met straal R rond de oorsprong

$$\bar{u}(R) = u(0) + \int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \nabla^2 u \, d^3r \;;$$

de volume-integraal loopt over het inwendige van de bol.

6. De functies van Green.

Zij V een ruimtegebied met rand O en $\vec{r}_1$ een punt in V. De functie van Green $G(\vec{r}|\vec{r}_1)$ behorende bij V wordt gedefinieerd door de eisen

(i) $\nabla^2 G(\vec{r}|\vec{r}_1) = 0$ voor $\vec{r} \neq \vec{r}_1$;

(ii) $G(\vec{r}|\vec{r}_1) = \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$ + begrensde functie van $\vec{r}$;

(iii) $G(\vec{r}|\vec{r}_1) = 0$ als $\vec{r}$ op O ligt.

M.a.w. $G(\vec{r}|\vec{r}_1)$ is de electrostatische potentiaal van een eenheidspuntlading in $\vec{r}_1$ binnen een geaarde geleider O. De eigenschappen (i) en (ii) worden samengevat in de formule

$$\nabla^2 G(\vec{r}|\vec{r}_1) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_1). \tag{18}$$

Hieruit volgt direct dat de potentiaal in V veroorzaakt door een ladingsdichtheid ρ gelijk is aan

$$u(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}|\vec{r}_1)\, \rho(\vec{r}_1)\, d^3\vec{r}_1. \tag{19}$$

Dit is de oplossing van de Poisson-vergelijking met randvoorwaarde $u = 0$ op O. Wanneer men eenmaal de functie van Green kent voor elke $\vec{r}_1$ in V is dit randwaardeprobleem dus opgelost.

Opgave 60. Overtuig u ervan dat, in het geval dat de rand in het oneindig ligt, de functie van Green juist de Coulomb-potentiaal is.

Opgave 61. Leid (18) af zonder delta-functie, maar met behulp van (16) en een bolletje rond $\vec{r}$. (Dit was het officiële bewijs voordat ook de wiskundigen de delta-functie hadden begrepen.)

Opgave 62. Bewijs dat er niet meer dan één functie is die aan de gestelde eisen (i), (ii), (iii) voldoet.

Opgave 63. Bewijs dat de "begrensde functie" in eis (ii) zelfs een analytische functie is.

Opgave 64. Vind de functie van Green voor het geval dat V de halfruimte $z > 0$ is.

Opgave 65. Vind de functie van Green voor het inwendige van een bol; en voor het uitwendige van de bol.

Als de functie van Green eenmaal bekend is voor een bepaalde V is het Laplace-probleem met gegeven randwaarden opgelost. Om dat in te zien vulle men in (16) voor v de functie van Green in; het resultaat is

$$4\pi u(\vec{r}_1) = - \oint u(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}|\vec{r}_1)}{\partial n} do. \qquad (20)$$

Hierdoor wordt u binnen V expliciet uitgedrukt in de randwaarden van u. Merk op het verschil met (17): de identiteit (17) geldt voor elke V maar vormt geen oplossing omdat rechts nog u èn $\partial u/\partial n$ voorkomen; de identiteit (20) vormt wel een oplossing maar vereist dan ook de kennis van de functie van Green voor het betrokken gebied V.

Opgave 66. Druk met behulp van de functie van Green de waarden van een harmonische functie binnen een bol uit in zijn randwaarden.

Opgave 67. Zelfde vraag voor een halfruimte, waarbij bovendien geeist wordt dat de functie nul wordt in het oneindige.

Hoewel in de definitie van $G(\vec{r}|\vec{r}_1)$ de vectoren $\vec{r}$ en $\vec{r}_1$ geheel verschillende rollen spelen, blijkt dat $G(\vec{r}|\vec{r}_1)$ symmetrisch is in beide variabelen. Om dit te bewijzen substitueren we in (16) $u = G(\vec{r}|\vec{r}_1)$ en $v = G(\vec{r}|\vec{r}_2)$:

$$\int \left\{ G(\vec{r}|\vec{r}_2)\, \nabla^2 G(\vec{r}|\vec{r}_1) - G(\vec{r}|\vec{r}_1)\, \nabla^2 G(\vec{r}|\vec{r}_2) \right\} d^3\vec{r} = 0.$$

Met behulp van (18) reduceert dit tot het gestelde

$$G(\vec{r}_1|\vec{r}_2) = G(\vec{r}_2|\vec{r}_1).$$

Physisch zegt dit: wanneer ik binnen een geleidend oppervlak met potentiaal nul een puntlading plaats in $\vec{r}_2$ en de resulterende potentiaal meet in $\vec{r}_1$, vind ik dezelfde waarde als wanneer ik de puntlading plaats in $\vec{r}_1$ en de potentiaal meet in r_2. Deze opmerkelijke eigenschap is een eerste voorbeeld van het reciprociteitsbeginsel, dat zich op veel plaatsen in de natuurkunde doet voelen.

Niet alleen is de functie van Green verschillend voor verschillende vormen van de rand, maar ze hangt ook van de randvoorwaarden af. Stel men heeft de Neumann randvoorwaarde: $\partial u/\partial n = 0$ op O; de bijbehorende functie van Green is dan gedefinieerd door de eisen (i) en (ii) en de nieuwe eis

(iii') $\partial G'(\vec{r}|\vec{r}_1)/\partial n$ = const. voor $\vec{r}$ op O.

Het is niet mogelijk om const. = 0 te nemen, omdat uit de eisen (i) en (ii) volgt

$$\oint \frac{\partial G'(\vec{r}|\vec{r}_1)}{\partial n} \, do = -4\pi.$$

Dus de in (iii') optredende constante moet zijn

$$\text{const.} = -\frac{4\pi}{\text{oppervlakte van O}}.$$

Anderzijds is door deze eisen G' nog maar op een constante term na bepaald; die leggen we vast door de eis

(iv') $\oint_O G'(\vec{r}|\vec{r}_1)\, do = 0.$

Opgave 68. Bewijs dat de zo gedefinieerde $G'(\vec{r}_2|\vec{r}_1)$ weer symmetrisch in $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ is.

Opgave 69. Laat zien dat een oplossing van het probleem van Neumann is

$$4\pi\ u(\vec{r}_1) = \oint_0 \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\ G'(\vec{r}|\vec{r}_1)\ do. \qquad (21)$$

Opgave 70. Vind G' voor de halfruimte $z > 0$ en verklaar het resultaat in electrostatische taal.

"Greense functies" komen in de moderne natuurkunde in velerlei vermommingen voor. Ze hebben echter steeds de volgende kenmerkende eigenschappen:

Ze zijn oplossingen van de vergelijking met een deltafunctie in het rechterlid;

Ze hebben een dubbel stel variabelen maar hebben een symmetrie-eigenschap met betrekking tot die variabelen;

Wanneer ze eenmaal bekend zijn, is het probleem opgelost; m.a.w. het vinden van de Greense functie is even moeilijk als het vinden van de oplossing. Door het invoeren van een Greense functie lost men een probleem niet op, maar maakt men het wat makkelijker om met de al of niet bekende oplossing te manipuleren.

7. Gedrag van Greense functies op de rand.

Laat V weer een gegeven gebied met rand 0 zijn. Definieer Ω als de verzameling van functies op 0 waarvan de integraal over 0 gelijk nul is. Bij elke $f\varepsilon\Omega$ hoort een harmonische functie u in V die f als randwaarde aanneemt: $u(0) = f$. De normale afgeleide $u_n(0) = g$ definieert een element $g\varepsilon\Omega$ dat eenduidig door f bepaald wordt. Omgekeerd hoort bij elke

$g\epsilon\Omega$ een en slechts een $f\epsilon\Omega$. We hebben hier dus een éénduidige afbeelding van Ω op zichzelf gedefinieerd. De afbeelding is lineair, maar niet lokaal: de waarde van g in een punt van O hangt af van de waarden van f in alle punten van O.

Om deze afbeelding expliciet te schrijven kiezen we eerst in (21) de variabele $\vec{r}_1$ op O,

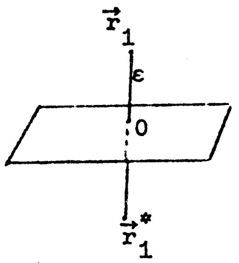
$$f(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \oint g(\vec{r})\, G'(\vec{r}|\vec{r}_1)\, do. \qquad (22)$$

Om ook omgekeerd g uit te drukken in f nemen we in (20) de normale afgeleide op O,

$$g(\vec{r}_1) = -\frac{1}{4\pi} \oint f(\vec{r})\, \frac{\partial^2 G(\vec{r}|\vec{r}_1)}{\partial n_1 \partial n}\, do. \qquad (23)$$

Men kan (22) opvatten als een integraalvergelijking voor g bij gegeven f; dan is (23) de oplossing. Omgekeerd kan men (23) als integraalvergelijking voor f opvatten, die door (22) wordt opgelost. De beide integraalkernen zijn duidelijk eindige functies voor $\vec{r} \neq \vec{r}_1$, maar het gedrag voor $|\vec{r}-\vec{r}_1| \to 0$ moet nader onderzocht worden.

Eerst onderzoeken we het gedrag van $G'(\vec{r}|\vec{r}_1)$ als $\vec{r}_1$ een punt op O nadert. Neem dat punt op O als oorsprong, en het raakvlak aan O als xy-vlak. Stel $\vec{r}_1=(0,0,\varepsilon)$, en laat het spiegelbeeld aangeduid worden met $\vec{r}_1^{\,*} = (0,0,-\varepsilon)$. Dan is



$$G'(\vec{r}|\vec{r}_1) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1^{\,*}|} + \tilde{G}'(\vec{r}|\vec{r}_1),$$

waarin $\tilde{G}'$ begrensd is niet alleen als functie van $\vec{r}$, maar ook als functie van $\vec{r}_1$, dus voor $\varepsilon \to 0$. Daaruit volgt, als $\vec{r}$ en $\vec{r}_1$ op O liggen,

$$G'(\vec{r}|\vec{r}_1) = \frac{2}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \text{begrensde functie.}$$

Weliswaar is dit singulier voor $\vec{r} = \vec{r}_1$, maar de oppervlakte-integraal bestaat wel. Dus $G'(\vec{r}|\vec{r}_1)$ is integreerbaar, zodat (22) een niet-singuliere integraalvergelijking is.

Om (23) te onderzoeken merken we op dat G van de vorm is

$$G(\vec{r}|\vec{r}_1) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1^{*}|} + \tilde{G}(\vec{r}|\vec{r}_1)$$

met begrensde $\tilde{G}$. Daaruit volgt eerst, voor $\vec{r}$ op O naar vooralsnog $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\partial G(\vec{r}|\vec{r}_1)}{\partial n} = - \left[\frac{\partial G(\vec{r}|\vec{r}_1)}{\partial z}\right]_{z=0}$$

$$= -2\varepsilon \left\{x^2+y^2+\varepsilon^2\right\}^{-\frac{3}{2}} + \text{begrensde termen.}$$

Vervolgens door differentiëren naar $-\varepsilon$ en $\varepsilon = 0$ zetten,

$$\frac{\partial^2 G(\vec{r}|\vec{r}_1)}{\partial n_1 \partial n} = 2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} + \text{begrensde termen.}$$

Kennelijk is dit niet integreerbaar over x,y, zodat (23) een singuliere integraalvergelijking is (zie Deel II).

Om te weten welke betekenis aan de singuliere integraal in (23) toegekend moet worden, herinneren we ons dat hij ontstaan is uit (20); we moeten dus deze overgang nauwkeuriger uitvoeren. Daarbij mogen we van de niet-singuliere term $\tilde{G}$ afzien, en het oppervlak als een platte schijf met straal R behandelen, omdat het alleen gaat om de singuliere termen. De bijdrage tot $u(\vec{r}_1)$ waar het om gaat is dus

$$4\pi\ u^s(0,0,\varepsilon) = - \iint\limits_{x^2+y^2<R^2} f(x,y)\ \frac{-2\varepsilon}{(x^2+y^2+\varepsilon^2)^{3/2}}\ dx\ dy.$$

Voor het gemak voeren we in de afkorting

$$\bar{f}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho,\varphi)\ d\varphi = \bar{f}(0) + \frac{\rho^2}{s}\ \bar{f}''(0) + \ldots \quad (24)$$

Dan wordt

$$u^s(0,0,\varepsilon) = \int_0^R \bar{f}(\rho)\ \frac{\varepsilon}{(\rho^2+\varepsilon^2)^{3/2}}\ \rho\ d\rho$$

$$= \bar{f}(0) \int_0^R \frac{\varepsilon\rho d\rho}{(\rho^2+\varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{\bar{f}''(0)}{2}\int_0^R \frac{\varepsilon\rho^3 d\rho}{(\rho^2+\varepsilon^2)^{3/2}} + \ldots .$$

Elke integraal kan uitgevoerd worden en bestaat dan uit een term die van de bovengrens afkomt en R bevat, en een term afkomstig van de ondergrens.

$$u^s(0,0,\varepsilon) = \bar{f}(0)\left[\frac{-\varepsilon}{(R^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} + 1\right]$$

$$+ \frac{\bar{f}''(0)}{2}\left[\varepsilon\ \frac{R^2+2\varepsilon^2}{(R^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} - 2\varepsilon^2\right] + \ldots .$$

De termen afkomstig van de bovengrens zijn veroorzaakt door ons willekeurigeafsnijden bij $\rho = R$: zij vallen weg tegen overeenkomstige termen van de integratie over $\rho > R$. Samen krijgt men

$$u(0,0,\varepsilon) = = \bar{f}(0) - \varepsilon^2\ \bar{f}''(0) + \ldots$$

$$+ \int\limits_{\rho>R} \bar{f}(\rho)\ \frac{\varepsilon}{(\rho^2+\varepsilon^2)^{3/2}}\ \rho d\rho - \frac{\varepsilon}{(R^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\ \bar{f}(0) + \frac{\varepsilon}{2}\ \frac{R^2+2\varepsilon^2}{(R^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\ \bar{f}''(0) + \ldots$$

(25)

De eerste regel is de bijdrage van de singulariteit. In de tweede regel levert de limiet $\varepsilon \to 0$ geen moeilijkheid meer op; zij wordt

$$\varepsilon \int_{\rho>R} \bar{f}(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2} - \varepsilon \frac{\bar{f}(0)}{R} + \frac{\varepsilon}{2} R \bar{f}''(0) + O(\varepsilon^3).$$

De eerste term is de integraal die je zou krijgen door klakkeloos in (20) de ε in de noemer nul te nemen, en tevens het schijfje $\rho < R$ uit te snijden om de ontstane divergentie schadeloos te maken. Daarbij blijkt nu een correctie-term $-\varepsilon\bar{f}(0)/R$ te komen, die precies de benodigde term is om te maken dat in het resultaat de limiet $R \to 0$ genomen kan worden. Men noemt het resultaat het <u>eindige deel</u> van de divergente integraal:

$$\lim_{R\to 0} \left[\int_R^\infty \bar{f}(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2} - \frac{\bar{f}(0)}{R} \right] = \text{e.d.} \int_0^\infty \bar{f}(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2} . \qquad (26)$$

Als resultaat vindt men nu in de eerste plaats door $\varepsilon = 0$ te zetten in (25)

$$u(0,0,0) = \bar{f}(0) \quad \text{of} \quad u(\vec{r}_1) = f(\vec{r}_1) \quad \text{voor } \vec{r}_1 \text{ op } 0,$$

hetgeen alleen de juistheid van (20) verifiëert. Vervolgens

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} = - \lim_{\varepsilon = 0} \frac{u(0,0,\varepsilon) - u(0,0,0)}{\varepsilon}$$

$$= \text{e.d.} \int_0^\infty \bar{f}(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \text{ e.d.} \oint \bar{f}(\vec{r}) \frac{\partial^2 G(\vec{r}|\vec{r}_1)}{\partial n_1 \partial n} \, do.$$

Dit legt dus de manier vast waarop de singulariteit in (23) geïnterpreteerd moet worden.

<u>Opgave 71</u>. Waarom is in (24) geen term met de eerste afgeleide $\bar{f}'(0)$ opgenomen?

Opgave 72. Het is natuurlijk niet waar dat het "eindige deel" (26) bestaat voor elke functie $\bar{f}$; bewijs dat het bestaat voor elke $\bar{f}$ die aan (24) voldoet. (Opmerking: de boven gedefinieerde afbeelding van Ω op zichzelf is dus ook niet gedefinieerd voor alle functies in Ω.)

Opgave 73. Los op de integraalvergelijking voor g

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x,y)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} \, dx \, dy = f(x_1,y_1).$$

8. Het potentiaalprobleem in twee dimensies.

De Poisson-vergelijking in twee dimensies met randvoorwaarden kan geconstrueerd worden in volkomen analogie met het drie-dimensionale geval. Men kan echter ook het twee-dimensionale probleem als een speciaal geval van het drie-dimensionale behandelen, namelijk het geval waarin de ladingsdichtheid ρ en de randvoorwaarden niet van z afhangen. De reden om dit geval toch afzonderlijk te behandelen is dat een waardevolle oplosmethode met behulp van complexe functies bestaat die slechts in twee dimensies werkt.

Het analogon van de Coulomb-oplossing is de logarithmische potentiaal

$$u^L(\vec{s}) = \int \left[- 2 \log |\vec{s}-\vec{s}\,'| \right] \rho(\vec{s}\,') \, d^2\vec{s}\,' .$$

Met andere woorden,

$$\nabla^2 \left[- 2 \log s \right] = - 4\pi\delta(\vec{s}).$$

Deze potentiaal wordt echter niet nul in het oneindige, maar wordt logarithmisch oneindig.

Opgave 74. Bewijs dit resultaat op dezelfde manier als in § 1.

Opgave 75. Leid dit resultaat uit het driedimensionale geval af door de Coulomb-potentiaal van een oneindig lange rechte draad met lading 1 per lengte-eenheid te berekenen. (Aanwijzing: Neem de lengte eerst eindig en kies de willekeurige constante zo dat de limiet naar oneindige lengte bestaat.)

Opgave 76. In een cirkel met straal a ligt een (tweedimensionale) puntlading e op afstand $s_o < a$ van het middelpunt. Bewijs met de spiegelbeeldmethode dat de potentiaal die nul is op de cirkel gelijk is aan:

$$u = -2e \log \frac{as}{s_o s'} \qquad \text{(}s'\text{ afstand tot gespiegelde punt.)}$$

Nu een oplossing van de inhomogene Poisson-vergelijking bekend is, is het probleem weer gereduceerd tot het oplossen van de homogene Laplace-vergelijking in twee dimensies met gegeven randvoorwaarden.

Opgave 77. Bewijs het analogon van de stelling over het gemiddelde en concludeer dat een harmonische functie in twee dimensies geen maximum of minimum kan hebben tenzij op de rand.

Opgave 78. Als $u(x,y) = u(s,\varphi)$ harmonisch is, is dat ook

$$v(s,\varphi) = u\left(\frac{1}{s},\varphi\right).$$

Opgave 79. Laat zien dat de energiedichtheid van het veld v gelijk is aan die in het corresponderende punt van u, gedeeld door s^4.

Opgave 80. Als u harmonisch is binnen een gesloten kromme L geldt voor s_o binnen L

$$2\pi u(\vec{s}_o) = \oint_L \left\{ \log \frac{1}{|\vec{s}-\vec{s}_o|} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{|\vec{s}-\vec{s}_o|} \right\} dl.$$

Opgave 81. Definieer de functies van Green voor het twee-dimensionale geval bij de randvoorwaarden $u = 0$ en $\partial u/\partial n = 0$.

Opgave 82. Vind de functie van Green behorende bij het Dirichlet-probleem voor een halfvlak.

Opgave 83. Leid af dat het Dirichlet-probleem voor het halfvlak $y > 0$ opgelost wordt door

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-x')^2 + y^2} u(x',0)\, dx'. \qquad (27)$$

De oplosmethode met behulp van complexe functies berust op de volgende feiten. Schrijf $z = x + iy$, $w = u + iv$ en stel $w = f(z)$, waarin f een analytische functie is. Dan is (Cauchy-Riemann)

$$u_x = v_y, \qquad u_y = - v_x,$$

waaruit volgt dat u en v beide aan de Laplace-vergelijking voldoen. Als een gesloten kromme L in het x,y-vlak gegeven is, komt het probleem van Dirichlet voor het omsloten gebied G neer op het zoeken van een analytische functie f waarvan het reële gedeelte op L gegeven waarden aanneemt.

Opgave 84. Bewijs dat de beide componenten van het veld $\vec{E} = - \nabla u$ gegeven worden door $E_x - iE_y = -dw/dz$, en dat derhalve de energiedichtheid evenredig is met $|dw/dz|^2$.

Opgave 85. Vind de harmonische functie binnen de eenheidscirkel, die op de rand gelijk is aan $A \cos n\varphi$ (A constant, n geheel).

Opgave 86. Bewijs dat als u harmonisch is er altijd een v bij gevonden kan worden zo dat $u + iv$ een analytische functie van $x + iy$ is.

Opgave 87. Vind de analytische functie waarvan het reële deel gelijk is aan de bovenvermelde logarithmische potentiaal.

Opgave 88. Vind de harmonische functie binnen een hoek ter grootte $\alpha < 2\pi$, die op het ene been nul is en op het andere gelijk is aan 1.

Opgave 89. Vind de analytische functie waarvan (27) het reële deel voorstelt.

Toepassing. We berekenen het veld veroorzaakt door een oneindig vlak tralie van dunne evenwijdige draden op gelijke afstanden a, als alle draden dezelfde lading e per lengte-eenheid hebben. Neem een van de draden als z-as en laten de andere draden het x,y-vlak doorboren in de punten (na,0) met $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. De potentiaal van de eerste draad is

$$- 2e \log s = - 2e \,\mathrm{Re} \log(x+iy).$$

De potentiaal van het tralie is dus

$$- 2e \,\mathrm{Re} \sum_{-\infty}^{\infty} \log (x - na + iy).$$

Aangezien dit klaarblijkelijk divergeert berekenen we het veld in plaats van de potentiaal. Schrijf $x + iy = z$ (de z-component in de ruimte doet toch niet meer mee) en de veldcomponenten worden volgens een bovenstaand vraagstuk gegeven door

$$E_x - iE_y = 2e \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - na} = \frac{2e\pi}{a} \cos \frac{\pi z}{a}.$$

Bijvoorbeeld vindt men hieruit voor de y-component

$$E_y = \frac{2e\pi}{a} \frac{1 + \tan^2(\pi x/a)}{\tan^2(\pi x/a) + \mathrm{Tnh}(\pi y/a)} . \mathrm{Tnh}(\pi y/a).$$

Voor $y \to \infty$ nadert dit snel tot de waarde $2e\pi/a$, hetgeen de veldsterkte zou zijn als de lading gelijkmatig over het x,y-vlak zou zijn uitgesmeerd, dus met ladingsdichtheid e/a.

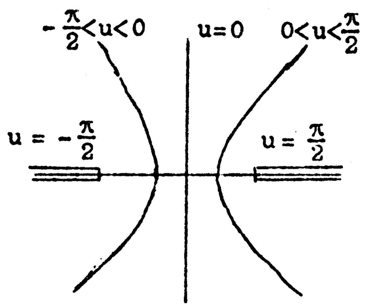
We zullen niet ingaan op de technieken die ontwikkeld zijn om analytische functies te construeren die aan de gestelde eisen voldoen. In plaats daarvan gaat men ook vaak uit van een analytische functie, en onderzoekt welk potentiaalprobleem erdoor wordt opgelost. Op deze manier kan men tabellen van oplosbare problemen samenstellen *).

Voorbeeld. Stel $w = \text{arc}\sin z$. Dan is

$$z = \sin w = \sin u \operatorname{Csh} v + i \cos u \operatorname{Sinh} v.$$

Daaruit volgt

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1;$$



dus de krommen u = constant zijn confocale hyperbolen in het x,y-vlak. Voor $u = \frac{\pi}{2}$ vouwt de hyperbool zich samen aan weerskanten van de halve lijn $x \geq 1$, en voor $u = -\frac{\pi}{2}$ vouwt hij zich langs $x \leq -1$. (Zie Fig.) Derhalve is u een harmonische functie die op deze twee halve lijnen verschillende constante waarden aanneemt. We hebben dus de potentiaal gevonden in het geval van een spleet in een geleidende plaat waarvan de twee helften op verschillende spanning zijn gebracht.

Opgave 90. Bereken de veldsterkte in de spleet.

Opgave 91. Bereken de energiedichtheid van het electrostatische veld in een willekeurig punt van de ruimte.

*) Zie bijv. H. Kober, Dictionary of conformal representations (Dover Publications, 1952).

Opgave 92. Laat zien dat v de snelheidspotentiaal is van een potentiaalstroming door de spleet. Teken de stroomlijnen. Bewijs dat de totale stroom door de spleet gelijk is aan π.

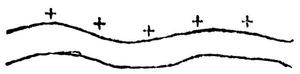
Men kan de oplosmethode nog plooibaarder maken door de volgende kunstgreep. Laat $\zeta = \xi + i\eta$ een complexe variabele zijn en stel $\zeta = \varphi(z)$ en $w = \psi(\zeta)$, met analytische φ en ψ. Dan voldoen u en v als functies van ξ,η ook aan de Laplace-vergelijking. Men kan dan φ geschikt kiezen, zodat de randen in het x,y-vlak afgebeeld worden op een eenvoudigere figuur in het ξ,η-vlak, en vervolgens de Laplace-vergelijking in deze eenvoudigere geometrie oplossen. Zo'n afbeelding d.m.v. een analytische functie heet een conforme afbeelding, omdat de hoek tussen twee infinitesimale vectoren erdoor niet veranderd wordt.

Opgave 93. Bewijs dit door in het punt (x,y) een infinitesimale vector (dx,dy) te nemen, en te laten zien dat de afbeelding $(d\xi,d\eta)$ daarvan gedraaid is over een hoek die onafhankelijk is van de keuze van (dx,dy).

Opgave 94. Beeld de eenheidscirkel af op een halfvlak, en los zo het Dirichlet-probleem op voor een cirkel.

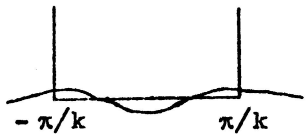
Opgave 95. Bewijs dat de electrostatische energiedichtheid gelijk is aan die van het eenvoudiger probleem in het ξ,η-vlak, vermenigvuldigd met $|dz/d\zeta|^2$.

Toepassing. In een zeepvlies zijn golven mogelijk (zie figuur). De potentiële energie wordt gedeeltelijk veroorzaakt door de vergroting van het oppervlak. Maar bovendien heeft een zeepvlies een electrostatische opper-



vlakteleding tengevolge van de moleculaire structuur. Die lading geeft een electrisch veld, waarvan de energie tot de potentiële energie bijdraagt. Het gaat er dus om de electrostatische energie te berekenen van een oppervlakteleding σ op het gegolfde oppervlak $y = \varepsilon \cos kx$. Dit is een tweedimensionaal probleem, en we zijn alleen geinteresseerd in de energie in tweede orde van ε, dus in het veld in eerste orde.

Voor $\varepsilon = 0$ is de potentiaal $u^0 = - 2\pi\sigma \, |y|$. Het gedrag in het oneindig wordt door de golving in het oppervlak niet beïnvloed, zodat we kunnen verwachten



$$u(x, y \to +\infty) \;=\; - (2\pi\sigma)\, y.$$

Het is natuurlijk voldoende alleen het veld boven het oppervlak te berekenen. Verder is het veld periodiek, zodat het voldoende is te nemen $-\pi/k < x < \pi/k$. De halve strook $\left\{ |x| < \pi/k, \; y > 0 \right\}$ beelden we nu af in het ζ-vlak met behulp van

$$\zeta \;=\; e^{ikz} ,$$

Het is duidelijk dat de bodem dan terecht komt op de eenheidscirkel $|\zeta| = 1$, en de twee zijwanden komen aan weerszijden van het segment $- 1 \leq \xi < 0$. Dank zij de periodiciteit van u als functie van z, kunnen we de waarden van u aan weerszijden van dit segment aan elkaar knopen, zodat u een harmonische functie binnen de eenheidscirkel wordt. Alleen de oorsprong van het ζ-vlak is een uitzondering, omdat die overeenkomt met de punten $y = \infty$ van het z-vlak. Bij nadering naar dat punt gedraagt u zich als

$$u \approx - (2\pi\sigma)\, y = \frac{2\pi\sigma}{k} \log |\zeta| .$$

De potentiaal u^{o} in het x,y-vlak wordt dus in het ξ,η-vlak de potentiaal van een twee-dimensionale puntlading $-(\pi\sigma/k)$ in de oorsprong met randvoorwaarde $u = 0$ op de eenheidscirkel.

Het gegolfde oppervlak $y = \varepsilon \cos kx$ wordt afgebeeld op

$$- \frac{1}{k} \log |\zeta| = \varepsilon \cos \operatorname{Arg} \zeta .$$

Als $\bar{w},\vartheta$ poolcoordinaten in het ζ-vlak voorstellen, is dit

$$\bar{w} = e^{-k\varepsilon \cos \vartheta} = 1 - k\varepsilon \cos \vartheta + \tfrac{1}{2} k^{2}\varepsilon^{2} \cos^{2}\vartheta + O(\varepsilon^{3}).$$

Tot in deze orde stelt dat een cirkel voor met middelpunt verschoven naar $(-k\varepsilon,0)$ en straal $1 + \frac{1}{2}k^{2}\varepsilon^{2}$. Omdat het zeepvlies geleidend is, moet weer $u = 0$ op deze nieuwe rand zijn.

Hoofdstuk III

DE GOLFVERGELIJKING

1. Inleiding.

Het belangrijkste voorbeeld van een hyperbolische vergelijking is de golfvergelijking in een, twee of drie dimensies:

$$\nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (1)$$

De variabelen x,y,z kunnen de hele drie-dimensionale ruimte doorlopen, of beperkt zijn tot een gebied V; in het laatste geval treden nog randvoorwaarden op die de physische aard van de rand O van V weergeven. De variabele t loopt gewoonlijk van $-\infty$ tot $+\infty$, en men is geïnteresseerd in het beginwaarde-probleem ("Cauchy-probleem"): gegeven u en u_t op het tijdstip $t = 0$ binnen V, te vinden u in V voor alle $t > 0$, eventueel ook $t < 0$.

Opgave 1. Los het beginwaarde-probleem op voor de eendimensionale golfvergelijking in het gebied $x > 0$, met de randvoorwaarde $u(0,t) = 0$. (Aanwijzing: gebruik de oplossing uit hoofdstuk I en kies de beginwaarden zo dat er een oneven functie van x is.)

Opgave 2. Dito met de randvoorwaarde $u_x(0,t) = 0$.

Omdat (1) een homogene lineaire vergelijking is, kan men voor een verzameling afzonderlijke oplossingen zoeken en door superponeren een algemenere construeren, zoals in § 2 van het vorige hoofdstuk. Dan blijft nog het probleem over om die superpositie zo te kiezen dat aan de gestelde beginvoorwaarden voldaan is. Natuurlijk is dit alleen mogelijk mits de verzameling van oplossingen voldoende groot is;

men noemt de verzameling dan <u>compleet</u>. Bovendien moeten ze om practische reden ook aangepast zijn aan de vorm van V.

Om zo'n verzameling van oplossingen van (1) te construeren zetten we eerst

$$u(x,y,z,t) = v(x,y,z)\, e^{-i\omega t},$$

waarbij dus een voorlopig willekeurige constante ω ingevoerd wordt. Dan moet v voldoen aan de "Helmholtz-vergelijking"

$$\nabla^2 v + \omega^2 v = 0, \qquad (2)$$

en aan eventuele randvoorwaarden. (Dat kan natuurlijk alleen als de randvoorwaarden onafhankelijk van t zijn.)

De volgende stap is om bij vaste ω oplossingen van de elliptische vergelijking (2) te vinden. Deze methode komt dus neer op het vinden van een volledig stel eigenfuncties. In een begrensd gebied blijkt het dat men niet aan (2) en de randvoorwaarden kan voldoen voor elke ω. Men vindt dan een discrete verzameling van mogelijke waarden van ω, het zgn. <u>spectrum van eigenwaarden</u>. In een onbegrensd gebied zijn de mogelijke waarden van ω alle punten in een interval, men heeft dan een <u>continu spectrum</u>. Bovendien zijn dan complexe waarden van ω mogelijk, en men moet dan nagaan of de bijbehorende oplossingen nodig zijn om de verzameling van oplossingen compleet te maken. Overigens hebben discrete eigenwaarden en de bijbehorende eigentrillingen ook dikwijls zelf al physische betekenis, bijv. bij een snaar, een acoustische resonator, of een electro-magnetische trilholte. (In dit laatste geval heeft men eigenlijk met een meer-componentige u te maken, namelijk de veldcomponenten. De Schrödingervergelijking voor een niet-relativistisch deeltje is niet van de gedaante (1), maar na afsplitsen van de tijdfactor wel van de gedaante (2), indien de potentiaal nul is.)

We gaan niet in detail in op het vinden van de eigenfuncties, ondat zulks in Deel I behandeld is in verband met de warmtegeleidingsvergelijking. Daarentegen zullen we nu de techniek van de Greense functies op de golfvergelijking toepassen.

Opgave 3. In het geval van de onbegrensde ruimte kan men gemakkelijk oplossingen van (2) vinden in de gedaante van vlakke golven. Bewijs dat die oplossingen compleet zijn, in de betekenis dat ze elke beginwaarde $u(x,0)$, $u_1(x,0)$ kunnen reproduceren.

Opgave 4. Los met behulp van vlakke golven het beginwaarde-probleem op in een rechthoekige doos met randvoorwaarde $u = 0$ op de wand.

Opgave 5. Los het beginwaarde-probleem op voor een vrij Schrödinger-deeltje in een rechthoekige doos.

2. De Helmholtz-vergelijking.

In een dimensie reduceert die tot een gewone differentiaalvergelijking voor $v(x)$

$$v'' + \omega^2 v = 0. \qquad (3)$$

Neem het geval van een snaar ter lengte L

$$0 \leqslant x \leqslant L, \qquad v(0) = 0, \qquad v(L) = 0.$$

De eigenwaarden en eigenfuncties zijn

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Voor andere waarden van ω^2 zijn er geen oplossingen.

We definiëren een functie van Green door de vergelijking

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x|x_1) + \omega^2 G(x|x_1) = - \delta(x-x_1), \qquad (4)$$

en de eis dat $G(x|x_1)$ aan bovengenoemde randvoorwaarden voldoet. G hangt parametrisch van ω^2 af; voor elke ω^2 die niet een van de eigenwaarden is, is G eenduidig vastgelegd, omdat de homogene vergelijking met randvoorwaarden dan geen oplossing heeft.

Om G te vinden merken we eerst op dat voor $x < x_1$ het rechterlid nul is, zodat men makkelijk de oplossing kan vinden die nul is bij $x = 0$:

$$G(x|x_1) = A \sin \omega x. \qquad (0 \leq x < x_1) \qquad (5a)$$

Dito aan de andere kant van x_1:

$$G(x|x_1) = B \sin \omega(L-x). \qquad (x_1 < x \leq L) \qquad (5b)$$

De vraag is nu wat (4) ons vertelt over het gedrag van G voor $x = x_1$.

In de eerste plaats moeten (5a) en (5b) continu aansluiten; immers een sprong in G zou een δ-functie in zijn afgeleide opleveren, en dus een δ'-functie in zijn tweede afgeleide, dewelke in (4) niet voorkomt. Dat geeft een verband tussen de constanten A en B

$$A \sin \omega x_1 = B \sin \omega(L-x_1).$$

Echter een sprong in de afgeleide van G geeft een δ-functie in de tweede afgeleide, hetgeen juist nodig is om aan (4) te voldoen. De grootte van die sprong is te vinden door (4) te integreren van $x_1 - \varepsilon$ tot $x_1 + \varepsilon$

$$G'(x_1+\varepsilon|x_1) - G'(x_1-\varepsilon|x_1) + O(\varepsilon) = -1.$$

In de limiet $\varepsilon \to 0$ geeft dit een tweede verband tussen A en B

$$\omega B \cos \omega(L-x_1) + \omega A \cos \omega x_1 = 1.$$

Men vindt nu gemakkelijk A en B en vervolgens

$$G(x|x_1) = \frac{\sin \omega x \sin \omega(L-x_1)}{\omega \sin \omega L}, \qquad (x < x_1)$$

$$= \frac{\sin \omega(L-x) \sin \omega x_1}{\omega \sin \omega L}. \qquad (x > x_1)$$

Opgave 6. Merk op dat weer $G(x|x_1) = G(x_1|x)$. Bewijs dat a priori op dezelfde manier als in het vorige hoofdstuk.

Opgave 7. In de vergelijking staat alleen ω^2 als parameter, maar in de oplossing komt ω zelf voor. Hoe is dat te rijmen?

Opgave 8. Los de Helmholtz-vergelijking met gegeven randwaarden op:

$$v'' + \omega^2 v = 0, \qquad v(0) = a, \qquad v(L) = b,$$

met behulp van de functie van Green.

Opgave 9. Los de inhomogene vergelijking met randvoorwaarden

$$v'' + \omega^2 v = f(x), \qquad v(0) = v(L) = 0$$

op met behulp van de functie van Green.

Opgave 10. Als in de voorgaande oplossing ω^2 gelijk aan een eigenwaarde ω_n^2 (met eigenfunctie v_n) is, is een nodige voorwaarde voor het bestaan van een oplossing

$$\int_0^L v_n(x) f(x) dx = 0.$$

(Aanwijzing: substitueer v en v_n in de tweede formule van Green.)

De gevonden functie van Green heeft, bij vaste x, x_1 als functie van ω beschouwd, polen bij $\omega = n\pi/L$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$), dus als ω^2 samenvalt met een der eigenwaarden ω_n^2. Inderdaad bestaat er bij deze waarden van ω geen oplossing van (4), zoals uit de laatste opgave volgt. Wanneer L groter wordt, komen deze polen dichter op elkaar te liggen en men verwacht dus dat het geval van een onbegrensd gebied geen enkele reële waarde van ω een oplossing van (4) toelaat. Dat wordt nu nader onderzocht.

Beschouw de vergelijking (3) in het gebied $-\infty < x < \infty$. Als lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde heeft hij twee lineair onafhankelijke oplossingen, waarvoor men mag kiezen

$$v_1(x) = e^{i\omega x}, \qquad v_2(x) = e^{-i\omega x} .$$

Bij gebrek aan randvoorwaarden heeft men dus voor elke reële of complexe ω een twee-dimensionale lineaire oplossingsruimte. We kunnen echter complexe waarden van ω uitsluiten door te eisen dat de oplossingen begrensd moeten zijn voor $x \to \pm\infty$. Dit wordt gesuggereerd door bovenstaande beschouwing over grote doch eindige L. (De werkelijke reden is echter dat de verzameling functies $\{e^{i\omega x}; -\infty < \omega < \infty\}$ een volledig stelsel vormen, waarin elke kwadratisch integreerbare functie op de reële as ontwikkeld kan worden; zie volgende paragraaf.) Met de extra eis dat de oplossing begrensd moet zijn heeft (3) dus een continu spectrum $-\infty < \omega < \infty$.

Omdat er voor complexe ω^2 geen toegelaten oplossingen van de homogene vergelijking zijn, is het mogelijk de inhomogene vergelijking (4) op te lossen. Neem eerst ω^2 in het bovenste halfvlak, Im $\omega^2 > 0$; en laat ω die vierkantswortel zijn waarvoor eveneens geldt Im $\omega > 0$. Dan is $G(x|x_1)$ eenduidig bepaald door (4) en de eis dat hij nul wordt voor

$x \rightarrow \pm \infty$; een berekening als boven geeft

$$G(x|x_1) = \frac{e^{i\omega(x_1-x)}}{-2i\omega}, \qquad (x < x_1) \qquad (6a)$$

$$= \frac{e^{i\omega(x-x_1)}}{-2i\omega}. \qquad (x > x_1) \qquad (6b)$$

In dit resultaat is het niet meer nodig dat ω^2 complex is. Men kan ongestraft ω^2 naar de positieve reële as schuiven en men vindt dat deze formule ook geldt voor reële $\omega > 0$. Door ω^2 beneden de reële as te nemen, en voor ω die wortel te nemen waarvoor $\operatorname{Im} \omega > 0$ is, vindt men dezelfde formule ook voor $\omega < 0$.

<u>Opgave 11</u>. Construeer een tweede functie van Green

$$G^*(x|x_1) = \frac{e^{-i\omega|x-x_1|}}{2i\omega}.$$

(Opmerking: het is a priori duidelijk dat als G een oplossing is van (4), zijn complex toegevoegde G* ook een oplossing is.)

<u>Opgave 12</u>. Het verschil van beide oplossingen G en G* moet een oplossing van de homogene vergelijking zijn. Verifiëer dat.

<u>Opgave 13</u>. Door toevoegen van de tijdfactor vindt men dat $G(x|x_1)\, e^{-i\omega t}$ een oplossing is van

$$u_{xx} - u_{tt} = -\, e^{-i\omega t}\, \delta(x-x_1),$$

dus van de golfvergelijking met een oscillerende bron in x_1. Laat zien dat $G(x|x_1)\, e^{-i\omega t}$ een oplossing is waarbij de golven uit de bron weglopen, terwijl $G^*(x|x_1)\, e^{-i\omega t}$ een oplossing voorstelt met inlopende golven.

<u>Opgave 14</u>. Vind de Greense functies G en G* door (4) direct voor reële ω op te lossen. Welke andere Greense functies vindt men zo nog?

De Helmholtz-vergelijking in drie dimensies kan op analoge wijze behandeld worden. We zijn in het bijzonder geïnteresseerd in het geval van een onbegrensd gebied, dus met randvoorwaarde alleen dat de oplossingen naar nul moeten gaan voor $r \to \infty$. De vergelijking voor de functie van Green is

$$\nabla^2 G(\vec{r}|\vec{r}_1) + \omega^2 G(\vec{r}|\vec{r}_1) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_1). \qquad (7)$$

De volgende twee oplossingen zijn gemakkelijk te verifiëren,

$$G(\vec{r}|\vec{r}_1) = \frac{e^{i\omega|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \quad \text{en} \quad G^*(\vec{r}|\vec{r}_1) = \frac{e^{-i\omega|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}. \qquad (8)$$

Immers, dat ze voor $\vec{r} \neq \vec{r}_1$ aan de homogene vergelijking voldoen volgt door expliciete berekening. En voor $\vec{r}$ in de onmiddellijke omgeving van $\vec{r}_1$ gedraagt G zich als $|\vec{r}-\vec{r}_1|^{-1}$, zodat

$$\nabla^2 G(\vec{r}|\vec{r}_1) = \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \text{eindige termen}$$

$$= -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) + \text{eindige termen.}$$

Merk op dat G en G* wel tot nul naderen in het oneindige, maar niet erg snel; bijvoorbeeld zijn ze niet kwadratisch integreerbaar in de ruimte, vergelijk § 3.

<u>Opgave 15</u>. Verifieer de gegeven oplossingen ook door integreren over een klein bolletje met straal ε, in analogie met het bewijs voor het een-dimensionale geval.

<u>Opgave 16</u>. Laat zien dat G uitlopende en G* inlopende golven beschrijft, vergelijk opgave 13.

<u>Opgave 17</u>. Vind G en G* door eerst bij complexe ω^2 de kwadratisch integreerbare oplossingen van (7) te zoeken en dan ω^2 naar de reële as te schuiven.

Opgave 18. Als v een oplossing is van de Helmholtz-vergelijking in een volume V geldt

$$4\pi v(\vec{r}_1) = \oint_0 \left\{ \frac{e^{i\omega|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{i\omega|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \right\} do.$$

Opgave 19. Schrijf ook het analogon van (II,17) geldend voor elke voldoend differentieerbare functie v in V.

3. Uitweiding over operatoren.

Het is mogelijk om de golfvergelijking in de geest van Deel I te schrijven in de gedaante van een stel lineaire vergelijkingen in de eerste orde van $\partial/\partial t$. Daartoe voeren we in vier onbekende functies $(u_0, u_x, u_y, u_z) = (u_0, \vec{u})$ en onderwerpen zo aan de vergelijkingen

$$\dot{u}_0 = \vec{\nabla}.\vec{u} \qquad \dot{\vec{u}} = \vec{\nabla} u_0 \qquad \text{ofwel} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_0 \\ \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\nabla} \\ \vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ \vec{u} \end{pmatrix}.$$

Het is duidelijk dat dan elk van vier componenten aan de golfvergelijking voldoet.

Schrijf voor $(u_0, \vec{u})$ weer u en verder voor de differentiaaloperator -iH, zodat het stel van vier vergelijkingen de gedaante krijgt

$$\dot{u} = -iHu. \qquad (9)$$

Definieer een scalair product van twee vier-componentige functies u en v als volgt

$$(u,v) = \int_V (u_0^* v_0 + \vec{u}^* \vec{v})\, d^3r,$$

met integratie over het beschouwde volume V, hetgeen de

hele ruimte zijn kan. Dit product bestaat mits ik alleen functies met eindige norm toelaat,

$$\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Zo'n verzameling van kwadratisch integreerbare functies (en in dit geval vier-componentige) heet een Hilbert-ruimte. Laten u en v twee differentieerbare functies uit deze Hilbert-ruimte zijn, dan geldt

$$(v,Hu) = i \int_V (v_o^* \vec{\nabla}.\vec{u} + \vec{v}^*.\vec{\nabla} u_o)\, d^3\vec{r}$$

$$= i \oint_O (v_o^* \vec{u} + \vec{v}^* u_o).d\vec{o} - i \int_V (\vec{u}.\vec{\nabla} v_o^* + u_o \vec{\nabla}.\vec{v}^*)\, d^3r.$$

Laat nu nog de toegelaten functies beperkt worden door zulke randvoorwaarden dat de oppervlakte-integraal nul is, bijvoorbeeld de randvoorwaarde $u_o = 0$, en dus ook $v_o = 0$ op O. Dan geldt, dank zij de factor i in de definitie van H, *)

$$(v,Hu) = (Hv,u).$$

Dus H is een hermitische operator in de Hilbert-ruimte met als definitie-gebied de differentieerbare functies die nul zijn op de rand.

Deze eigenschap is essentieel; overigens mag men voor H binnen zeer wijde grenzen elke hermitische operator onafhankelijk van t nemen zonder het navolgende onwaar te maken.

*) Het min-teken in de definitie van H is irrelevant en dient alleen voor overeenstemming met de in de quantummechanica gebruikelijke formules.

Opgave 20. Schrijf het geval van de een-dimensionale golfvergelijking in dit formalisme.

Opgave 21. Men kan ook de golfvergelijking door twee vergelijkingen van de eerste orde vervangen (i.p.v. vier), door twee functies $(u_1, u_2) = u$ in te voeren om met behulp van Pauli-matrices te zetten

$$\dot{u} = \vec{\sigma}.\vec{\nabla}\, u.$$

Definieer weer een inwendig product en een hermitische H.

Om (9) op te lossen zet men weer $u(\vec{r},t) = e^{-i\omega t}\, v(\vec{r})$, waarbij v moet voldoen aan

$$Hv = \omega v,$$

en aan de randvoorwaarden. In geval van een begrensd gebied is er slechts voor een discreet stel eigenwaarden ω_n een oplossing v_n. In geval van de gehele ruimte, dus zonder randvoorwaarden, zijn er oplossingen voor elke ω, maar door te eisen dat de oplossingen begrensd zijn hebben we dat ingeperkt tot reële waarden van ω. Omdat die oplossingen echter niet kwadratisch integreerbaar bleken en dus niet tot de toegelaten Hilbert-ruimte behoren, moeten we volgens het algemene formalisme van deze paragraaf zeggen dat er in dit geval geen eigenfuncties en eigenwaarden zijn. Toch spelen de golfoplossingen die we voor reële ω vonden een onmisbare rol en men moet dus toch weer proberen een continu spectrum te definiëren.

Daartoe beschouwt men de inhomogene vergelijking

$$(h - \omega)\, v = f, \qquad (10)$$

waarbij f een willekeurige functie uit de Hilbert-ruimte is. In het geval van begrensde V heeft dit een oplossing voor elke f mits ω niet een eigenwaarde is. Als ω met een eigenwaarde ω_n samenvalt, bestaat alleen een oplossing indien f orthogonaal is op elke bijbehorende eigenfunctie v_n. Immers dan vindt men

$$(v_n, f) = (v_n, (H-\omega_n)v) = ((H-\omega_n)v_n, v) = 0.$$

Men kan de oplossing van (10) schrijven als

$$v = (H-\omega)^{-1} f = R_\omega f,$$

waarin de resolvent R_ω een operator is die gedefinieerd is voor elke ω behalve de eigenwaarden. In het algemeen is R_ω een integraaloperator; de integraalkern ervan is identiek met de functie van Green voor het beschouwde probleem.

In het geval dat V de gehele ruimte is, kan (10) opgelost worden voor elke complexe ω, dat wil zeggen dat er een oplossing v in de Hilbert-ruimte is. Laat men echter ω, bij vaste f, naar de reële as gaan, dan wordt de norm $\| v \|$ steeds groter en voor reële ω is de norm oneindig. Dus voor reële ω zijn er geen oplossingen in de Hilbert-ruimte en bestaat R_ω dus niet. Men definieert nu het spectrum van H als die waarden van ω waarvoor R_ω niet bestaat. Deze definitie omvat zowel het discrete als het continue spectrum.

Opgave 22. Controleer de gedane uitspraken voor de eendimensionale golfvergelijking.

Opgave 23. Bewijs algemeen dat de discrete eigenwaarden in een begrensd gebied V reëel zijn.

Opgave 24. Pas dit formalisme toe op de ruimte van complexe vectorvelden $\vec{F}(\vec{r})$ met bijvoorwaarde div $\vec{F} = 0$, en met H = rot. (Vergelijk Deel I, blz. VI,29.)

4. De Greense functies voor de golfvergelijking.

In analogie met het voorgaande eisen we hirvoor weer *)

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r},t|\vec{r}_1,t_1) = - \delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\, \delta(t-t_1).$$

Als gebied V nemen we de hele ruimte en bij gebrek aan randvoorwaarden zal er dus meer dan een oplossing zijn. Wegens de invariantie voor translatie in ruimte en tijd mogen we nemen $\vec{r}_1 = 0$, $t_1 = 0$ en moeten dus oplossen

$$\nabla^2 u - u_{tt} = - \delta(\vec{r})\, \delta(t). \tag{11}$$

Laat v_ω de Fourier-getransformeerde met betrekking tot t zijn,

$$u(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\, d\omega.$$

Dan wordt de vergelijking

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\nabla^2 v_\omega(\vec{r}) + \omega^2 v_\omega(\vec{r})\right\} e^{-i\omega t}\, d\omega = - \frac{1}{2\pi}\, \delta(\vec{r}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, d\omega .$$

Daaraan in kennelijk voldaan als geldt

$$\nabla^2 v_\omega + \omega^2 v_\omega = - \frac{1}{2\pi}\, \delta(\vec{r}). \tag{12}$$

Een oplossing hiervan hebben we gevonden in (8)

$$v_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^{i\omega r}}{r} .$$

Dat geeft

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(r-t)}\, d\omega = \frac{\delta(r-t)}{4\pi r} . \tag{13}$$

*) De factor 4π in het rechterlid is hier weggelaten in overeenstemming met wat in de veldentheorie gebruikelijk is.

Deze oplossing is kennelijk nul voor $t < 0$, en heet daarom de geretardeerde Greense functie van de golfvergelijking. Hij kan beschouwd worden als de "golf" die veroorzaakt wordt door de "bron" in het rechterlid van (11). Als we voor het oplossen van (12) de tweede mogelijkheid in (8) hadden gekozen, zouden we een andere oplossing van (11) hebben verkregen, de geavanceerde functie van Green, die nul is voor $t > 0$. Voor $t < 0$ stelt hij voor een oplossing van de homogene golfvergelijking, die net zo gekozen is dat hij bij $t = 0$ door de bronterm in het rechterlid van (11) wordt teniet gedaan. Mathematisch is dat een even goede oplossing van (11) maar hij heeft niet zo'n directe physische betekenis als de geavanceerde oplossing.

Opgave 25. Laat zien dat de geavanceerde Greense functie gelijk is aan $(4\pi r)^{-1}\ \delta(r+t)$.

Opgave 26. Laat zien dat de halve som van de geretardeerde en geavanceerde oplossingen gelijk is aan $(4\pi)^{-1}\ \delta(r^2-t^2)$ en weer een Greense functie is.

Opgave 27. Laat zien dat de geretardeerde oplossing van (11) ook gevonden kan worden door de homogene golfvergelijking op te lossen voor $t > 0$ met beginvoorwaarden $u(\vec{r},0) = 0,\ u_t(\vec{r},0) = \delta(\vec{r})$.

Opgave 28. Zij $f(\vec{r},t)$ een functie die nul is voor $|\vec{r}| \to \infty$ en voor $|t| \to \infty$. Geef de oplossing van

$$\nabla^2 u - u_{tt} = -\ f(\vec{r},t)$$

met beginvoorwaarde $u(\vec{r},t \to -\infty) = 0$. Laat zien dat die oplossing geschreven kan worden in de gedaante

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,',$$

die men als een "geretardeerde Coulomb-oplossing" kan opvatten.

Opgave 29. Pas dit resultaat toe op een bewegende puntbron, beschreven door

$$f(\vec{r},t) = 4\pi e\ \delta(\vec{r}-\vec{R}(t)).$$

Laat zien dat dan geldt

$$u(\vec{r},t) = \frac{e}{[r](1-[v_r])} .$$

Hierin is [r] de "geretardeerde afstand", gedefinieerd door $[r] = |\vec{r}-\vec{R}(t_r)|$, waarbij het geretardeerde tijdstip de oplossing is van de vergelijking $|\vec{r}-\vec{R}(t_r)| = t-t_r$. Verder is $[v_r]$ de radiële component van de snelheid op het geretardeerde tijdstip

$$[v_r] = \dot{\vec{R}}(t_r) \cdot \frac{\vec{r}-\vec{R}(t_r)}{|\vec{r}-\vec{R}(t_r)|} .$$

(Aanwijzing: om de integraal over $\delta\{\vec{r}\,'-\vec{R}(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|)\}$ te berekenen moet het argument $\vec{r}\,'-\vec{R}(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|)$ als nieuwe integratievariabele ingevoerd worden; de bijbehorende Jacobiaan is $(1-[v_r])^{-1}$.)

Een andere manier om (11) op te lossen wordt vaak gebruikt. Neem de Fourier-getransformeerde naar de ruimte zowel als de tijd

$$u(\vec{r},t) = \int\int U(\vec{k},\omega)\ e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}\ d^3\vec{k}\ d\omega .$$

Invullen in (11) geeft dan

$$\iint U(\vec{k},\omega)(-k^2+\omega^2)\ e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}\ d^3\vec{k}\ d\omega = -\frac{1}{(2\pi)^4}\iint e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} d^3\vec{k}\ d\omega.$$

Daaruit volgt

$$U(\vec{K},\omega) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \frac{1}{\omega^2-\vec{K}^2}$$

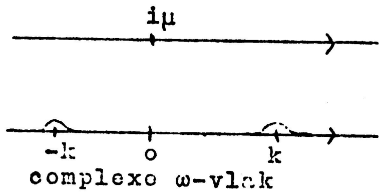
$$u(\vec{r},t) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \iint \frac{e^{i(\vec{K}.\vec{r}-\omega t)}}{\omega^2-\vec{K}^2} d^3\vec{K}\, d\omega \; .$$

Maar nu moet men zich afvragen hoe het nulpunt in de noemer behandeld moet worden.

Schrijf daartoe even

$$u(\vec{r},t) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int e^{i\vec{K}.\vec{r}} d^3\vec{K} \int \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-k^2} d\omega \; .$$

De integraal over ω heeft een pool in $\omega = k$ en een in $\omega = -k$. De integratieweg loopt langs de reële as, maar men kan de polen ontzeilen door even naar beneden of naar boven uit te wijken (zie Fig.). We zullen laten zien



complexe ω-vlak

dat door boven beide polen langs te lopen men de geretardeerde oplossing krijgt. In dat geval namelijk kan men de integratieweg naar boven schuiven en dus integreren langs $\omega+i\mu$ ($-\infty<\omega<\infty$; $\mu>0$), zonder een singulariteit te passeren. De integraal over ω is dus gelijk aan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t+\mu t}}{(\omega+i\mu)^2-k^2} d\omega \; . \qquad (14)$$

Indien $t < 0$ is, is dit van de orde $e^{-\mu|t|}$. Daar μ willekeurig groot genomen kan worden moet de integraal nul zijn. Met deze keuze van de integratieweg hebben we dus de oplossing gevonden die nul is voor $t < 0$.

<u>Opgave 30</u>. Maak het verschuiven van de integratieweg exact door eerst de integratieweg te vervormen in ($-\infty$, $-\Omega$, $-\Omega+i\mu$, $+\Omega+i\mu$, $+\Omega$, $+\infty$) en vervolgens Ω naar oneindig te laten naderen.

Opgave 31. Bewijs dat (14) in absolute waarde kleiner dan const. $e^{-\mu|t|}$ is voor $t < 0$.

Opgave 32. Laat zien dat de geavanceerde oplossing verkregen wordt door onder de polen langs te integreren.

Opgave 33. Vind het verschil van geavanceerde en gereterdeerde oplossing door op te merken dat dat net gelijk is aan de beide residuen in de polen.

Opgave 34. Behandel op dezelfde manier de vergelijking

$$\nabla^2 u - u_{tt} - m^2 u = - \delta(\vec{r})\, \delta(t), \qquad (15)$$

met constante m, in de oneindige ruimte.

De volgende nomenclatuur en notatie zijn min of meer ingeburgerd *), maar kleine variaties komen nog voor. **) Neem de vergelijking (15), waarvan (11) een bijzonder geval is. Die leidt tot de integraal

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \iint \frac{e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}}{m^2+k^2-\omega^2}\, d^3\vec{k}\, d\omega,$$

waarbij nog verschillende keuzen voor de integratieweg van ω mogelijk zijn.

De gereterdeerde Greense functie $\Delta_R(\vec{r},t)$ is gegeven door deze integraal met integratieweg boven beide polen.

De geavanceerde Greense functie $\Delta_A(\vec{r},t)$ is gegeven door deze integraal met integratieweg beneden beide polen.

*) G. Källén, Quantenelektrodynamik in Handbuch der Physik, deel V,1.

**) Zie Bogoliubov en Shirkov, Introduction to the theory of quantized fields, blz. 146.

De symmetrische Greense functie $\bar{\Delta}(\vec{r},t)$ is gedefinieerd als de halve som van beide

$$\bar{\Delta} = \tfrac{1}{2}(\Delta_R + \Delta_A).$$

De causale Greense functie $\Delta_F(\vec{r},t)$ is $-2i$ maal deze integraal met een integratieweg die onderlangs de pool $-\sqrt{k^2+m^2}$ en boven langs de pool $+\sqrt{k^2+m^2}$ gaat.

De Pauli-Jordan-functie $\Delta(\vec{r},t)$ voldoet aan de homogene vergelijking en wordt verkregen door om beide polen heen te integreren in de richting tegengesteld aan de klok.

Het positief-frequentiedeel $\Delta^{(+)}(\vec{r},t)$ wordt verkregen door een gesloten integratieweg om de pool $+\sqrt{k^2+m^2}$ tegengesteld aan de klok.

Het negatief-frequentiedeel $\Delta^{(-)}(\vec{r},t)$ wordt verkregen door om de pool $-\sqrt{k^2+m^2}$ heen te lopen tegengesteld aan de klok.

De Hilbert-getransformeerde $\Delta^{(1)}(\vec{r},t)$ wordt verkregen door een achtbaan die om $+\sqrt{k^2+m^2}$ heen loopt tegengesteld aan de klok en om $-\sqrt{k^2+m^2}$ met de klok mee, en een factor i toe te voegen.

Opgave 35. Bewijs de relaties

$$\Delta_R(\vec{r},t) = \Delta_R(-\vec{r},t) = \Delta_A(\vec{r},-t)$$

$$\Delta(\vec{r},t) = \Delta_A(\vec{r},t) - \Delta_R(\vec{r},t)$$

$$\Delta_R(\vec{r},t) = -\vartheta(t)\,\Delta(\vec{r},t),\quad \Delta_A(\vec{r},t) = \vartheta(t)\,\Delta(\vec{r},t)$$

waarin $\vartheta(t) = 1$ voor $t > 0$ en $\vartheta(t) = 0$ voor $t < 0$.

Opgave 36. Bewijs

$$\Delta^{(+)}(\vec{r},t) = \Delta^{(+)}(-\vec{r},t) = \Delta^{(-)}(\vec{r},-t)$$

$$\Delta(\vec{r},t) = \Delta^{(+)}(\vec{r},t) + \Delta^{(-)}(\vec{r},t)$$

$$\Delta^{(1)}(\vec{r},t) = i\Delta^{(+)}(\vec{r},t) - i\Delta^{(-)}(\vec{r},t).$$

Opgave 37. Bewijs

$$\Delta_F(\vec{r},t) = \Delta_F(-\vec{r},t) = \Delta_F(\vec{r},-t)$$

$$\Delta_F(\vec{r},t) = -2i(\Delta_R+\Delta^{(-)}) = -2i(\Delta_A-\Delta^{(+)})$$

$$\Delta_F(\vec{r},t) = 2i\ \vartheta(t)\ \Delta^{(+)}(\vec{r},t) - 2i\ \vartheta(-t)\ \Delta^{(-)}(\vec{r},t).$$

Opgave 38. Leid af de volgende uitdrukkingen voor Δ

$$\Delta(\vec{r},t) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\iint e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}\ \delta(m^2+k^2-\omega^2)\ \varepsilon(\omega)\ d^3\vec{k}\ d\omega$$

waarin $\varepsilon(\omega) = 1$ voor $\omega > 0$ en $\varepsilon(\omega) = -1$ voor $\omega < 0$.

Opgave 39. Leid af

$$\Delta(\vec{r},t) = \frac{-1}{2\pi^2 t}\int_0^\infty \cos kr \cos(t\sqrt{m^2+k^2})\ dk. \qquad (16)$$

Opgave 40. Bewijs

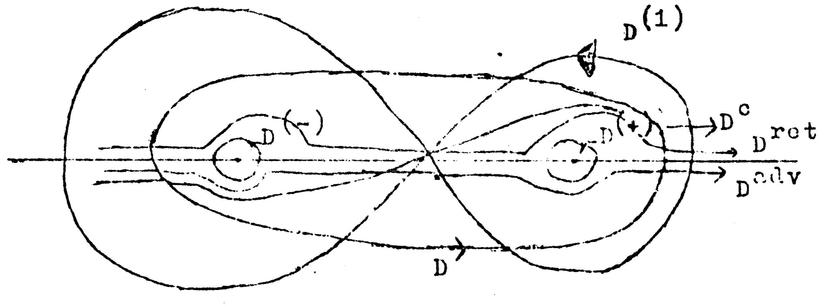
$$\Box\,\Delta = 0 \qquad \Box\,\Delta_F = 2i\ \delta(\vec{r})\delta(t), \qquad \Box\,\Delta^{(+)} = \Box\,\Delta^{(-)} = 0,$$

waarin $\Box = \nabla^2 - \partial_t^2$ de "operator van d'Alembert" is.

Opgave 41. Bewijs dat Δ_R voor $t > 0$ eenduidig is vastgelegd door de eisen

$$(\Box-m^2)\ \Delta_R(\vec{r},t) = 0,\ \Delta_R(\vec{r},0) = 0,\ \Delta_{R,t}(\vec{r},0) = \delta(\vec{r}).$$

Opmerking. Al deze formules gelden ook voor de gewone golfvergelijking, d.w.z. voor het geval m = 0. Dat geval wordt vaak aangeduid door een D te schrijven in plaats van Δ.



5. Maximum snelheid en het principe van Huygens.

De drie-dimensionale golfvergelijking zonder massa heeft de functie van Green (13). Deze functie is overal nul behalve op een bolschil die zich met snelheid 1 vanuit de oorsprong voortplant. Men herkent daaraan de volgende eigenschappen.

(i) De oplossing is nul voor $t < 0$, doordat we juist die oplossing gekozen hebben die daaraan voldoet. Op $t = 0$ is er een kortstondige bron in de oorsprong gelocaliseerd, waardoor u van 0 gaat verschillen. Dit geeft het aanzijn aan de uitdijende bolschil.

(ii) Het effect van de bron heeft een maximum snelheid 1: in een punt op afstand r van de oorsprong blijft u gelijk aan nul totdat het door de uitdijende bolschil bereikt wordt, dus voor $t < r$.

(iii) Het effect heeft ook een minimum snelheid 1 : in elk punt is u weer nul nadat de bolschil gepasseerd is. Dit heet het principe van Huygens.

Een maximum snelheid kan alleen voorkomen bij hyperbolische vergelijkingen, omdat alleen een karakteristiek als scherp golffront kan optreden. De reden is dat langs dat golffront twee verschillende analytische oplossingen van de golfvergelijkingen aan elkaar sluiten, namelijk de oplossing $u = 0$ vóór het golffront met een oplossing $u \neq 0$ erachter. Voor een niet-karakteristieke lijn of niet-karakteristiek oppervlak echter is de oplossing eenduidig bepaald door zijn waarde en afgeleide op die lijn, resp. oppervlak. Als die aan de ene kant nul zijn, sluit daar aan de andere kant ook alleen maar de oplossing $u = 0$ bij aan. Een karakteristiek daarentegen was gedefinieerd als een lijn of oppervlak waarop de randvoorwaarden niet meer vrijuit gekozen konden worden, maar aan zekere extra voorwaarden moesten voldoen. Dat houdt

ook in, dat bij elk van deze toegelaten voorwaarden meer dan een oplossing mogelijk moet zijn om toch aan het totale aantal oplossingen toe te komen. Dat is de reden waarom een karakteristiek als golffront kan optreden.

Opgave 42. Als men in de een-dimensionale golfvergelijking de karakteristiek als coördinaatvlakken invoert krijgt hij de gedaante $u_{\xi\eta} = 0$. Laat zien dat er oplossingen $u(\xi,\eta)$ bestaan die nul zijn voor $\eta < 0$ en ongelijk nul voor $\eta > 0$.

Opgave 43. Laat zien dat $\Delta_R(\vec{r},t)$ nul is voor $r > t$.

De vergelijking (I,12) voor de karakteristieke oppervlakken luidt voor onze golfvergelijking

$$\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 = \eta_t^2 . \tag{17}$$

Als men een functie $\eta(\vec{r},t)$ gevonden heeft die hieraan voldoet, verkrijgt men een schaar van karakteristieke hyperoppervlakken door te zetten $\eta(\vec{r},t)$ = constant. We zullen thans deze vergelijking oplossen.

De vier-dimensionale normaal op een oppervlak $\eta(\vec{r},t)$ = const. heeft componenten evenredig met $(\eta_x,\eta_y,\eta_z,\eta_t)$. De vergelijking (17) drukt uit dat de projectie van die normaal op de t-as even lang moet zijn als de projectie op de x,y,z-ruimte. Een hyperoppervlak waarvoor dit waar is in elk punt verschaft een oplossing. Een speciale oplossing wordt verkregen door een plat vlak te kiezen waarvoor dit geldt:

$$\eta(\vec{r},t) = \vec{k}.\vec{r} - kt.$$

Hierin is $\vec{k}$ een willekeurige constante vector met lengte k.

Verdere oplossingen kunnen geconstrueerd worden met de methode van Hoofdstuk I en Deel II. De functie

$$\eta(\vec{r},t) = \vec{k}.\vec{r} - kt + c \tag{18}$$

bevat vier integratie-constanten k_x, k_y, k_z, c, en is dus een "volledige" oplossing. Door het opleggen van een of meer extra relaties tussen de integratie-constanten selecteren we een schaar van zulke platte vlakken en weten dan dat de omhullende wederom een oplossing van de differentiaalvergelijking is. Als extra relaties kiezen we voor ons doel

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1, \qquad c = 0 \tag{19}$$

en bepalen de omhullende door elimineren van de integratie-constanten uit het stel vergelijkingen (18), (19) en

$$0 = \frac{\partial\eta}{\partial k_x} = x + z\,\frac{dk_z}{dk_x} = x - z\,\frac{k_x}{k_z}\,,$$

$$0 = \frac{\partial\eta}{\partial k_y} = y + z\,\frac{dk_z}{dk_y} = y - z\,\frac{k_y}{k_z}\,.$$

Het resultaat volgt met enige algebra:

$$\eta(\vec{r},t) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} - t.$$

Dit is een nieuwe oplossing van (17) en leidt tot een schaar van karakteristieke hyperoppervlakken gegeven door

$$r - t = \text{constant.}$$

In het bijzonder ziet men dus dat het golffront van de Groense functie (13) een karakteristiek is.

In de vier-dimensionale $(\vec{r},t)$-ruimte stelt dit oppervlak een kegel voor, de <u>lichtkegel</u>. Hij bestaat uit een voorwaartse helft, de positieve lichtkegel, en een negatieve lichtkegel. De geretardeerde Groense functie is overal nul buiten de positieve lichtkegel, zodat het effect van een instantane puntbron alleen binnen de positieve lichtkegel merkbaar is. Omgekeerd wil dat zeggen dat de waarde van u in een punt $(\vec{r}_o,t_o)$ alleen afhangt van de bronnen in de negatieve lichtkegel met $(\vec{r}_o,t_o)$ als top dus in het gebied

$|\vec{r}-\vec{r}_o| \leq t_o-t$.

Opgave 44. Verifieer dat het hyperoppervlak $|\vec{r}-\vec{r}_o|=t_o-t$ aan de vergelijking voor de karakteristieken voldoet.

Opgave 45. Ten tijde t = 0 is u alleen van nul verschillend binnen een gesloten oppervlak $\varphi(x,y,z) = 0$. Hoe vindt men de vergelijking voor het daarbij horende golffront? Pas het antwoord toe op het geval $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2$.

Het principe van Huygens is een gevolg van het feit dat (13) de factor $\delta(r-t)$ bevat en dus niet alleen nul is voor $r > 1$, maar ook voor $r < t$. Het is een veel minder algemene eigenschap dan het bestaan van een maximum snelheid. Het geldt niet voor de vergelijking (15); dat is physisch te begrijpen omdat (15) de Schrödinger-vergelijking voor een relativistisch deeltje met massa m voorstelt, en in het golfpakketje van zo'n deeltje komen snelheden kleiner dan de lichtsnelheid voor. Het principe van Huygens geldt ook niet voor de golfvergelijking zelf in twee dimensies. Dat is physisch in te zien door de twee-dimensionale Greense functie op te vatten als de emissie van golven door een instantane bron in de vorm van een oneindige rechte, bijvoorbeeld de z-as. Het is dan duidelijk dat de golven wel een minimum tijd nodig hebben om een punt op afstand s van die bron te bereiken, maar dat daarna steeds golven zullen blijven arriveren, afkomstig van steeds verder verwijderde punten van de bron.

Opgave 46. Laat zien dat de functie $\Delta_R(\vec{r},t)$ voor $m \neq 0$ inderdaad niet nul is binnen de lichtkegel. (Aanwijzing: voor $t > 0$ wordt Δ_R gegeven door (16), maar deze integraal convergeert niet doordat Δ singulier is op de lichtkegel; neem daarom de afgeleide naar m en zet voor het gemak $\vec{r} = 0$:

$$\frac{\partial\Delta(0,t)}{\partial m} = \frac{m}{2\pi^2 t}\int_n^\infty \frac{\cos\omega t}{\sqrt{\omega^2-n^2}}\,d\omega\ ;$$

deze functie kan niet nul zijn omdat zijn Fourier-getransformeerde blijkbaar niet nul is.)

Dank zij het principe van Huygens kan men de volgende <u>integraal van Kirchhoff</u> afleiden. Laat V een volume omsloten door O, waarbinnen u aan de golfvergelijking voldoet. We passen het analogon van de tweede stelling van Green toe op het vier-dimensionale gebied gevormd door V en $(-\infty<t<\infty)$.

$$(\nabla^2-\partial_t^2)\ u(\vec{r},t) = 0,$$

$$(\nabla^2-\partial_t^2)\ G(\vec{r}-\vec{r}_1,t-t_1) = -\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\ \delta(t-t_1).$$

Vermenigvuldig de eerste regel met $G(\vec{r}-\vec{r}_1,t-t_1)$ en de tweede met $u(\vec{r},t)$; trek af en integreer over V en t

$$\int dt\oint\left\{G(\vec{r}-\vec{r}_1,t-t_1)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right\}do - \left[\int\left\{G\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial G}{\partial t}\right\}d^3r\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = u(\vec{r}_1,t_1).$$

Neem voor G de geretardeerde functie (13); dan is duidelijk dat de tweede integraal in beide grenzen nul is. Verder zetten we $|\vec{r}-\vec{r}_1| = R$ en duiden met [ ] aan dat de geretardeerde tijd $t = t_1 - R$ ingevuld moet worden. Dan komt er

$$\oint\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right\}do - \int dt\oint\frac{u(\vec{r},t)}{R}\frac{\partial}{\partial n}\delta\Big(R-(t_1-t)\Big)do = 4\pi u(\vec{r}_1,t_1),$$

In de tweede term kan men partieel integreren over t wegens de identiteit

$$\frac{\partial}{\partial n}\delta\Big(R-(t_1-t)\Big) = \frac{\partial R}{\partial n}\delta'\Big(R-(t_1-t)\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial R}{\partial n}\delta\Big(R-(t_1-t)\Big)\right\}.$$

Het resultaat is dan de <u>integraal van Kirchhoff</u>:

$$\oint \left\{ \frac{1}{R}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\,\frac{\partial R}{\partial n}\,[u_t] \right\} do = 4\pi u(\vec{r}_1, t_1).$$

Daarmee is u in een willekeurig punt van V uitgedrukt in de waarden van u, $\partial u/\partial n$, u_t op het oppervlak O, elk genomen op het bijbehorende geretardeerde tijdstip. De integraal drukt uit dat $u(\vec{r}_1, t_1)$ samengesteld is uit golven die allemaal op een vroeger tijdstip van de wand zijn vertrokken.

Hoofdstuk IV

HET THEOREMA VAN NOETHER

1. Het algemene variatieprincipe.

Met de golfvergelijking correspondeert ook een variatieprincipe. Daartoe definieren we een integraal over een vier-dimensionaal gebied

$$I[u] = \tfrac{1}{2} \int (u_t^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2)\, d^3r\, dt. \qquad (1)$$

Dit is weer een functionaal gedefinieerd op alle differentieerbare functies $u(x,y,z,t)$. Als u een kleine variatie δu ondergaat is de resulterende verandering in I

$$\delta I = \int (u_t(\delta u)_t - \nabla u . \nabla \delta u)\, d^3r\, dt$$

$$= - \int (u_{tt} - \nabla^2 u)\, \delta u\, d^3\vec{r}\, dt + \oint .$$

De laatste term stelt een integraal voor over het driedimensionale hyperoppervlak dat het gebied omsluit. Die functies u waarvoor, bij gegeven waarden van u op dit hyperoppervlak, I stationair is moeten kennelijk voldoen aan de golfvergelijking $u_{tt} - \nabla^2 u = 0$. Men noemt de integraal (1) de actie-integraal en de integrand de Lagrangedichtheid. We zullen dit schema algemener formuleren.

In plaats van de vier coördinaten x,y,z,t voeren we in m onafhankelijke variabelen $x_k (k = 1,2,...,m)$. Verder voeren we in n onbekende functies $u_\nu (\nu = 1,2,...,n)$, bijvoorbeeld de drie componenten van een vectorveld. De afgeleiden noteren we als $u_{\nu,k}$, $u_{\nu,kl}$, enz. Laat nu als Lagrangedichtheid gegeven zijn een of andere functie van de x_k, de u_ν en de afgeleiden

$$L(x_k, u_\nu, u_{\nu,k}, u_{\nu,kl},\dots). \tag{2}$$

Daarmee komt overeen de actie-integraal

$$I[u] = \int L(x_k, u_\nu, u_{\nu,k}, u_{\nu,kl},\dots)\, d^m x.$$

De eis dat I stationair is leidt dan tot

$$\frac{\partial L}{\partial u_\nu} - \frac{d}{dx_k}\frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} + \frac{d^2}{dx_k dx_l}\frac{\partial L}{\partial u_{\nu,kl}} - \dots = 0, \tag{3}$$

hetgeen een stel van n differentiaalvergelijkingen voor de u_ν is. In de tweede term moet gesommeerd worden over k, in de derde over k en l. Echter, omdat de tweede afgeleide $u_{\nu,kl}$ dezelfde grootheid is als $u_{\nu,lk}$ moet men in de sommatie over k,l elk paar van indices slechts eenmaal opnemen. Een stel partiële differentiaalvergelijkingen met de eigenschap, dat het met behulp van een geschikt gekozen Lagrange-dichtheid L in de gedaante (3) geschreven kan worden, noemen we een Lagrange-systeem.

Opgave 1. Laat zien dat de Lagrange-vergelijkingen van de klassieke mechanica een speciaal geval van deze algemene formulering zijn.

Opgave 2. De klassieke bewegingsvergelijkingen voor een geladen deeltje in een gegeven electromagnetisch veld, beschreven door een scalaire potentiaal $\Phi(\vec{r},t)$ en een vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r},t)$ volgen uit

$$L(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \tfrac{1}{2}\, m\dot{\vec{r}}^2 - e\Phi(\vec{r},t) + \frac{e}{c}\,\dot{\vec{r}}.\vec{A}(\vec{r},t)\ . \tag{4}$$

Opgave 3. Kies voor de variabelen x_k de vier grootheden (x,y,z,ict) en voor de u_ν de grootheden $(A_x,A_y,A_z,i\Phi)$. De indices k en ν nemen nu dezelfde waarden aan en zullen daarom beide aangeduid worden met k,l, etc. Neem als Lagrange-dichtheid

$$L = -\frac{1}{16\pi} \sum_{k,l=1}^{4} (\partial_k u_l - \partial_l u_k)^2 + \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{4} j_k u_k \,, \qquad (5)$$

waarin $j_k(x) = (\vec{J}, ic\rho)$ de viervector van stroom- en ladingsdichtheid is. Laat zien dat hieruit de vergelijkingen volgen voor het electromagnetische veld.

Opgave 4. Construeer een Lagrange-dichtheid voor de vergelijking (III,15).

Uit een gegeven Lagrange-dichtheid volgt eenduidig een stel van n differentiaalvergelijkingen, maar een gegeven Lagrange-systeem van differentiaalvergelijkingen kan uit meer dan een Lagrange-dichtheid afgeleid worden. Bijvoorbeeld veranderen de differentiaalvergelijkingen niet als men de Lagrange-dichtheid met een constante vermenigvuldigt. Minder triviaal is de volgende meerduidigheid.

Laat $\Omega_k(x_l, u_\nu, u_{\nu,l}, \ldots)$ een stel van m functies van de x, de u, en de afgeleiden van u zijn. Onder de totale afgeleide van Ω_k naar x_h wordt verstaan

$$\frac{d\Omega_k}{dx_h} = \frac{\partial\Omega_k}{\partial x_h} + \frac{\partial\Omega_k}{\partial u_\nu} u_{\nu,h} + \frac{\partial\Omega_k}{\partial u_{\nu,l}} u_{\nu,lh} + \ldots$$

met dezelfde sommatie-conventie als boven. Nu geldt dat de bewegingsvergelijkingen horende bij een Lagrange-dichtheid L dezelfde zijn als die bij

$$L' = L + \frac{d\Omega_k}{dx_k} \,. \qquad (6)$$

Anders gezegd: Twee Lagrange-dichtheden waarvan het verschil een "totale divergentie" is geven dezelfde differentiaalvergelijkingen. We zullen L en L' "effectief gelijk" noemen. Het bewijs volgt direct uit de opmerking dat de actie-integraal I'[u] slechts door een oppervlakte-term verschilt van I[u]:

$$I'[u] - I[u] = \int \frac{d\Omega_k}{dx_h} d^m x = \oint \vec{\Omega} . \overrightarrow{d^{n-1} o},$$

hetgeen tot de variatie $\delta I'$ niet bijdraagt.

Opgave 5. Laat zien dat (4) effectief gelijk blijft als men op $\vec{A}$ en Φ een ijktransformatie toepast:

$$A' = \vec{A} + \nabla\zeta, \qquad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\dot{\zeta}.$$

Opgave 6. Laat zien dat men i.p.v. (4) ook mag nemen

$$L' = \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\Phi(\vec{r},t) - \frac{e}{c}\vec{r}.\left\{(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \dot{A}\right\}.$$

Opgave 7. Laat zien dat (5) effectief gelijk is aan

$$L' = -\frac{1}{8\pi}(\partial_k u_l)^2 + \frac{1}{8\pi}(\partial_k u_k)^2 + \frac{1}{c} j_k u_k.$$

Opgave 8. Stel $\Omega_k = \Omega_k(x_l, u_\nu)$. Bewijs expliciet dat de term $d\Omega_k/dx_k$ in (6) geen invloed op de bewegingsvergelijkingen heeft door aan te tonen dat

$$\left(\frac{d}{dx_l}\frac{\partial}{\partial u_{\nu,l}} - \frac{\partial}{\partial u_\nu}\right)\frac{d\Omega_k}{dx_k} = 0.$$

(Aanwijzing: leid af dat geldt

$$\frac{\partial}{\partial u_{\nu,l}}\frac{d\Omega_k}{dx_k} = \frac{\partial\Omega_k}{\partial u_\nu}\delta_{lk} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial u_\nu}\frac{d\Omega_k}{dx_k} = \frac{d}{dx_k}\frac{\partial\Omega_k}{\partial u_\nu}.)$$

Laat nu $\Psi_k(x_l, u_\nu, u_{\nu,l}, \ldots)$ een stel van n functies zijn van x, u, en de afgeleiden, met de eigenschap:

$$\frac{d\Psi_k}{dx_h} = 0 \text{ voor elke oplossing } \{u_\nu\} \text{ van de vergelijkingen.}$$

Dan zegt men dat de Ψ_k aan een behoudswet voldoet. Als rechtvaardiging voor deze naam kan men ten eerste opmerken, dat

in het geval van de klassieke mechanica, waarbij de tijd t de enige onafhankelijke variabele is, deze behoudswet de gedaante $d\Psi/dt$ aanneemt, en dus inderdaad zegt dat Ψ een integraal van de beweging is. Ten tweede, in het geval van relativistische velden, waarbij x,y,z, ict de onafhankelijke variabelen zijn, neemt de behoudswet de gedaante

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_3}{\partial z} + \frac{1}{ic}\frac{\partial\Psi_4}{\partial t} = 0.$$

Dit drukt uit dat Ψ_4/ic een grootheid is, waarvan de verandering in de tijd gelijk is aan minus de divergentie van een stroomdichtheid met componenten Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3. Het is dus inderdaad een behoudswet voor de locaal gedefinieerde grootheid Ψ_4/ic.

Opgave 9. Laat zien dat voor de bewegingsvergelijkingen die volgen uit (4) de energie $\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\Phi$ behouden is, mits Φ en $\vec{A}$ niet expliciet van t afhangen.

Opgave 10. Laat zien voor de golfvergelijking dat de energiedichtheid $\frac{1}{2}\{u_t^2 + (\nabla u)^2\}$ aan een behoudswet voldoet. Vind de overeenkomstige behoudswet voor (III,15).

Opgave 11. Voor de een-dimensionale golfvergelijking (snaar) voldoet behalve deze energiedichtheid ook de grootheid $u_t u_x$ aan een behoudswet. Leid dat af en concludeer eruit dat deze grootheid, evenals de energiedichtheid, weer aan dezelfde golfvergelijking voldoet.

Opgave 12. Laat zien dat voor het vrije electromagnetische veld (dus zonder ladingen en stromen) de energiedichtheid $(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)/8\pi$ en de impulsdichtheid $(c/4\pi)\,\vec{E}\wedge\vec{H}$ aan behoudswetten voldoen.

2. Transformaties.

In de voorgaande hoofdstukken is gebleken dat het transformeren naar aan het specifieke probleem aangepaste coördinaten een onmisbaar hulpmiddel is voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen. In het algemeen kan men transformaties beschouwen van de gedaante

$$x'_k = f_k(x,u), \qquad u'_\nu = g_\nu(x,u). \tag{7}$$

Opdat dit een goede transformatie is moet

$$\frac{d(f_k,g_\nu)}{d(x_l,u_\nu)} \neq 0, \qquad \frac{d(f_k)}{d(x_l)} \neq 0.$$

De tweede eis is nodig omdat anders bij vaste u de variabelen x'_k onderling afhankelijk zouden zijn en dus niet als nieuwe onafhankelijke variabelen gekozen zouden kunnen worden. (Trouwens, in bijna alle toepassingen bevatten de f_k de variabele u_ν niet, zodat de tweede eis in de eerste vervat is.) Door deze transformatie wordt ook een transformatie van de afgeleiden geïnduceerd,

$$u'_{\nu,k} = h_{\nu k}(x,u,u_{,l}), \qquad \text{etc.}$$

De berekening hiervan wordt echter in het algemeen al bij tweede afgeleiden zeer gecompliceerd.

Het is daarom moeilijk om bijvoorbeeld een stel tweede-orde differentiaalvergelijkingen direct te transformeren. Maar als ze een Lagrange-systeem vormen, zijn ze equivalent met de eis dat de actie-integraal

$$I[u] = \int L(x,u,u_{,l})\, d^n x$$

stationair moet zijn. Hierin kan men $x,u,u_{,l}$ in de nieuwe variabelen $x',u',u'_{,l}$ uitdrukken met resultaat

$$I[u] = \int L'(x',u',u'_{,1}) \frac{d(x)}{d(x')} d^m x' = I'[u'].$$

waarin L' de getransformeerde van de uitdrukking L is,

$$L(x,u,u_{,1}) = L'(x',u',u'_{,1}).$$

Als u(x) een functie is die I[u] stationair maakt, dan is de getransformeerde ervan, u'(x'), een functie die I'[u'] stationair maakt. M.a.w., als u(x) voldoet aan het stel differentiaalvergelijkingen overeenkomende met de Lagrange-dichtheid L, dan voldoet u'(x') aan het stel differentiaalvergelijkingen overeenkomende met de Lagrange-dichtheid $L'\{d(x)/d(x')\}$. Om deze getransformeerde differentiaalvergelijkingen te vinden is het dus voldoende om L' en d(x)/d(x') te kennen en hoef je derhalve uit (7) alleen maar de transformatie van de eerste-orde-afgeleiden te berekenen.

Opgave 13. Pas deze methode toe om de klassieke bewegingsvergelijking $m\ddot{\vec{r}} = - \nabla V(\vec{r})$ in poolcoördinaten te schrijven.

Opgave 14. Transformeer op deze manier de vergelijking van Poisson op poolcoördinaten en leid zo de uitdrukking voor de Laplace-operator in poolcoördinaten af.

Alle transformaties van het type (7) vormen natuurlijk een groep. We zijn geïnteresseerd in bepaalde ondergroepen daarvan, namelijk continue transformatie-groepen of Lie-groepen. Schrijf even alle variabelen tezamen: $\{x_1,\ldots,x_m,u_1,\ldots,u_n\} = X$. Stel nu je hebt een groep van transformaties, die geïdentificeerd kunnen worden met een of meer continue parameters α,

$$X' = F(X;\alpha).$$

Het product van deze transformatie met een andere uit de

groep, $X' = F(X;\beta)$ levert een derde

$$X'' = F(F(X';\alpha);\beta) = F(X;\gamma).$$

Daarbij is γ door α en β bepaald, $\gamma = \gamma(\alpha,\beta)$. Voorbeelden zijn de groep van translaties van ruimtelijke coördinaten,

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\alpha}, \qquad u'_\nu = u_\nu , \tag{8}$$

en die van draaiing van het assenstelsel. De overgang van rechthoekige op poolcoördinaten is een voorbeeld van een transformatie die niet tot een continue groep behoort.

Opmerking. In het geval van een klassiek deeltje betekent een coördinaten-transformatie, zoals (8), een transformatie van de afhankelijke variabelen u, terwijl de onafhankelijke variabele t onveranderd blijft. In het geval van een veld echter, betekent dezelfde coördinaten-transformatie een transformatie van de onafhankelijke variabelen x_k, terwijl het veld u_ν hetzelfde blijft.

Opgave 15. Beschrijf de groep van de Galileï-transformaties, zowel in het geval van klassieke deeltjes als in dat van velden. Bewijs dat hij isomorph is met de groep van translaties.

Opgave 16. Laat explicict zien dat de "speciale Lorentz-transformaties"

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad t' = \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}}$$

een groep vormen. Is die groep isomorph met die der translaties?

Opgave 17. In het geval van assendraaiingen bestaat de parameter α uit de drie hoeken van Euler. Schrijf de relatie $\gamma = \gamma(\alpha,\beta)$ voor dit geval expliciet.

Laat α_o de waarde van de parameter zijn waarvoor de transformatie F de identiteit is. Voor naburige waarden, $\alpha = \alpha_o + \varepsilon$, zal de transformatie niet veel van de identiteit verschillen, zodat men kan zetten

$$X' = F(X,\alpha_o+\varepsilon) = X + \varepsilon\Phi(X) + O(\varepsilon^2).$$

Als termen van de orde ε^2 worden weggelaten spreekt men van <u>infinitesimale transformaties</u>. Meer expliciet

$$x'_k = x_k + \varepsilon\varphi_k(x,u), \qquad u'_\nu = u_\nu + \varepsilon\chi_\nu(x,u). \tag{9a}$$

De inverse transformatie is dan eenvoudig

$$x_k = x'_k - \varepsilon\varphi_k(x',u'), \qquad u_\nu = u'_\nu - \varepsilon\chi_\nu(x',u'). \tag{9b}$$

<u>Opgave 18</u>. Bewijs dat de infinitesimale transformatie horende bij een assendraaiing wordt voorgesteld door

$$x'_k = x_k + \varepsilon a_{kl}x_l, \qquad a_{kl} = - a_{lk}. \; (k,l = 1,2,3) \tag{10a}$$

Voor een scalair veld geldt natuurlijk $u' = u$, maar een vectorveld transformeert bij deze draaiing volgens

$$u'_k = u_k + \varepsilon a_{kl}u_l. \tag{10b}$$

<u>Opgave 19</u>. Leid af dat de twee componenten van een Pauli spinor ψ onder dezelfde draaiing transformeren volgens

$$\psi' = \psi - \frac{1}{4}\,\varepsilon\, a_{kl}\, \sigma_k\sigma_l\psi, \tag{11}$$

waar de Pauli-matrixen σ_k werken op de spinor ψ.

Het is nodig om ook de transformatie van de afgeleiden $u_{\nu,k}$, die door (9) geïnduceerd wordt, te kennen. Daartoe zetten we eerst

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_l} = \delta_{kl} + \varepsilon \frac{d\varphi_k}{dx_l} = \delta_{kl} + \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_\lambda} u_{\lambda,l}\right) .$$

De tweede vorm is meer expliciet, maar de eerste zal voor ons voldoende zijn. In de gebruikelijke gevallen hangt φ_k niet van het veld af, zodat beide vormen identiek zijn. De Jacobi-determinant van deze transformatie is

$$\text{Det.} \left(\frac{dx'_k}{dx_l}\right) = 1 + \varepsilon \frac{d\varphi_k}{dx_k} . \tag{12}$$

Vervolgens vindt men

$$u'_{\nu,k} = \frac{\partial u'_\nu}{\partial x'_k} = \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_l} + \varepsilon \frac{d\chi_\nu}{dx_l}\right) \frac{dx_l}{dx'_k}$$

$$= \left(u_{\nu,l} + \varepsilon \frac{d\chi_\nu}{dx_l}\right)\left(\delta_{kl} - \varepsilon \frac{d\varphi_l}{dx_k}\right)$$

$$= u_{\nu,k} + \varepsilon \frac{d\chi_\nu}{dx_k} - u_{\nu,l} \frac{d\varphi_l}{dx_k} . \tag{13}$$

Opgave 20. Laat zien dat voor een assendraaiing (10) de afgeleiden van een vectorveld transformeren volgens

$$u'_{h,k} = u_{h,k} + \varepsilon a_{hl} u_{l,k} + \varepsilon a_{kl} u_{h,l} . \tag{14}$$

3. De stelling van Noether.

Beschouw een systeem van differentiaalvergelijkingen van de gedaante

$$\frac{\partial L}{\partial u_\nu} - \frac{d}{dx_k} \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} = 0 . \tag{15}$$

Voor het gemak beperken we ons hier tot Lagrange-dichtheden

die geen tweede of hogere afgeleiden bevatten, hetgeen trouwens het meest voorkomende geval is. De corresponderende actie-integraal is

$$I[u] = \int_V L(x,u,u_{,1})\, d^m x. \qquad (16)$$

Veronderstel nu dat de functie L de eigenschap heeft dat voor een bepaalde infinitesimale transformatie geldt

$$L(x',u',u'_{,1})\, d^m x' = L(x,u,u_{,1})\, d^m x. \qquad (17)$$

Dan is I[u] ook gelijk aan

$$I[u] = \int_{V'} L(x',u',u'_{,1})\, d^m x', \qquad (18)$$

waarin V' het gebied van de variabelen x' is dat overeenkomt met het gebied V van de x. Neem nu een functie die voldoet aan (15), zodat voor deze u geldt, dat (16) stationair is voor kleine variaties δu. Dan zal ook (18) stationair zijn voor kleine variaties $\delta u'$. Maar daaruit volgt dat u' voldoet aan

$$\frac{\partial L}{\partial u'_\nu} - \frac{d}{dx'_k}\frac{\partial L}{\partial u'_{\nu,k}} = 0.$$

Met andere woorden, als de Lagrange-dichtheid de invariantie-eigenschap (17) bezit, is het systeem van differentiaalvergelijkingen invariant voor de desbetreffende infinitesimale transformatie.

<u>Opgave 21</u>. Geen een voorbeeld waaruit blijkt dat de omgekeerde stelling niet geldt.

<u>Opgave 22</u>. Een geladen deeltje beweegt in een homogeen, constant magneetveld B parallel aan de z-as, zonder andere krachten. De Lagrange-functie die de beweging in x- en y-richting beschrijft is volgens (4)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}). \qquad (19)$$

Bewijs dat L de invariantie-eigenschap (17) bezit voor as-sendraaiing om de z-as. Ga vervolgens expliciet na dat de resulterende bewegingsvergelijkingen invariant zijn voor zulke draaiingen.

Opgave 23. Men verandert de bewegingsvergelijkingen niet als men deze Lagrange-functie vervangt door

$$L' = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{eB}{c}x\dot{y} \ . \tag{20}$$

Laat echter zien dat L' niet aan (17) voldoet voor draai-ingen.

Men kan echter nog een heel andere conclusie uit de invariantie-eigenschap (17) trekken, namelijk: Indien voor een bepaalde infinitesimale transformatie (17) geldt, dan kan men daaruit een behoudswet afleiden.

Om dit te bewijzen, druk ik rechts de getransformeerde x'_k, u'_ν, $u'_{\nu,l}$ uit in x_k, u_ν, $u_{\nu,l}$ door middel van (9a), (12) en (13)

$$L(x,u,u_{,l})\, d^m x = L(x+\varepsilon\varphi,\ u+\varepsilon\chi,\ u_{,l}+\dots)\,\frac{d(x')}{d(x)}\, d^m x.$$

De termen van eerste orde in ε geven

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}\varphi_k + \frac{\partial L}{\partial u_\nu}\chi_\nu + \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}}\left(\frac{d\chi_\nu}{dx_k} - u_{\nu,l}\frac{d\varphi_l}{dx_k}\right) + L\frac{d\varphi_k}{dx_k} = 0. \tag{21}$$

Dit is een identiteit voor alle waarden van x_k en alle mogelijke functies $u_\nu(x)$. Wanneer men nu voor u_ν een oplossing van (15) neemt, kan dit verder omgevormd worden. Ten eerste vormen de termen met χ tezamen een totale divergentie:

$$\frac{\partial L}{\partial u_\nu}\chi_\nu + \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}}\frac{d\chi_\nu}{dx_k} = \left(\frac{d}{dx_k}\frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}}\right)\chi_\nu + \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}}\frac{d\chi_\nu}{dx_k} = \frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}}\chi_\nu\right).$$

Ten tweede vormen de termen met φ tezamen ook een totale divergentie. Om dat te zien schrijve men

$$\frac{d}{dx_k} L\varphi_k = L \frac{d\varphi_k}{dx_k} + \frac{\partial L}{\partial x_k} \varphi_k + \frac{\partial L}{\partial u_\nu} u_{\nu,k}\varphi_k + \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,l}} u_{\nu,lk}\varphi_k$$

$$= L \frac{d\varphi_k}{dx_k} + \frac{\partial L}{\partial x_k} \varphi_k + \left(\frac{d}{dx_k} \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}}\right) u_{\nu,l}\varphi_l + \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} u_{\nu,lk}\varphi_l$$

$$= L \frac{d\varphi_k}{dx_k} + \frac{\partial L}{\partial x_k} \varphi_k + \frac{d}{dx_k} \left\{\frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} u_{\nu,l}\varphi_l\right\} - \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} u_{\nu,l} \frac{d\varphi_l}{dx_k}.$$

Daarmee is gevonden dat (21) geschreven kan worden

$$\frac{d}{dx_k} \left\{\frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} (\chi_\nu - u_{\nu,l}\varphi_l) + L\,\varphi_k\right\} = 0, \qquad (22)$$

hetgeen een behoudswet is voor

$$\Psi_k = \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} (\chi_\nu - u_{\nu,l}\varphi_l) + L\,\varphi_k. \qquad (23)$$

Hiermee is de stelling bewezen, en tevens de gedaante van de behouden grootheid gevonden.

Opgave 24. Laat $L(u_\nu, \dot{u}_\nu)$ de Lagrange-functie van een klassiek systeem zijn. Die is invariant voor translatie in de tijd: $t' = t + \varepsilon$, $u'_\nu = u_\nu$. Welke behoudswet volgt daaruit?

Opgave 25. Als N klassieke puntdeeltjes zich bewegen onder invloed van hun onderlinge wisselwerking maar zonder uitwendige krachten, is de Lagrange-functie alleen afhankelijk van hun onderlinge afstanden en derhalve invariant voor translatie

$$\vec{r}\,'_n = \vec{r}_n + \vec{a}. \qquad (n = 1,2,\ldots,N)$$

Vind daaruit een behoudswet.

Opgave 26. Pas de stelling toe om uit de invariantie van (15) voor draaiingen te concluderen dat de z-component van het impulsmoment een behouden grootheid is.

Opgave 27. De Lagrange-functie voor een relativistisch vrij deeltje in een dimensie is $L = - m \sqrt{1 - \dot{x}^2}$. Laat zien dat aan de invariantie-eis (17) voldaan is voor de infinitesimale Lorentz-transformatie

$$t' = t - \varepsilon x, \qquad x' = x - \varepsilon t.$$

Men kan de stelling nog uitbreiden door de eis (17) te vervangen door de zwakkere eis

$$L(x', u', u'_{,1})\, d^m x' = \left\{ L(x, u, u_{,1}) + \varepsilon \frac{d\Omega_k}{dx_k} \right\} d^m x, \qquad (24)$$

waarin $\Omega_k(x,u)$ een stel van m willekeurige functies is. Door uitschrijven tot in eerste orde van ε krijgt men dan wederom (21) maar met in het rechterlid $d\Omega_k/dx_k$ in plaats van 0. Dezelfde omvorming geeft dan in plaats van (24).

$$\frac{d}{dx_k} \left\{ \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} (\chi_\nu - u_{\nu,1}\varphi_1) + L\, \varphi_k - \Omega_k \right\} = 0,$$

hetgeen weer een behoudswet is.

Opgave 28. N klassieke deeltjes bewegen zich zonder uitwendige krachten. Beschouw de Galilei-transformatie

$$\vec{r}\,'_n = \vec{r}_n + \vec{b}t. \qquad (n = 1,2,\ldots,N)$$

Ga na dat de Lagrange-functie aan de eis (24) voldoet. Vind daaruit dat hun zwaartepunt rechtlijnig eenparig beweegt.

Opgave 29. Laat zien dat de Lagrange-functie (20) bij draaiing aan (24) voldoet en concludeer weer tot het behoud van de z-component van het impulsmoment.

Opgave 30. Leid voor (19) of (20) een behoudswet voor de kanonieke impuls in de x^2-richting af.

4. Toepassing op klassieke velden.

In deze paragraaf is steeds m = 4 en $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$. Verder zijn u_ν de componenten van een veld, dat voldoet aan een Lagrange-systeem van vergelijkingen, beschreven door een Lagrange-dichtheid $L(x,u,u_{,l})$. We veronderstellen weer dat er geen tweede of hogere afgeleiden in optreden. Men kan dan nagaan hoe verschillende invariantie-eigenschappen van L tot overeenkomstige behoudswetten leiden.

1. Translatie-invariantie geeft behoud van impuls en energie. Als L de vier variabelen x_k niet expliciet bevat, is L invariant voor

$$x'_k = x_k + \varepsilon a_k, \qquad u'_\nu = u_\nu$$

met willekeurige constante viervector (a_1,a_2,a_3,a_4). Eigenlijk zijn dit dus 4 invariantie-eigenschappen en we zullen dan ook vier behoudswetten vinden. Invullen in (22) geeft

$$\frac{d}{dx_k}\left\{-\frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}}\, u_{\nu,l}a_l + La_k\right\} = 0.$$

Omdat de vier getallen a_l willekeurig zijn, geldt voor $l = 1,2,3,4$

$$\frac{dT_{kl}}{dx_k} = 0, \qquad T_{kl} = -\frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}}\, u_{\nu,l} + L\delta_{kl}\,.$$

T_{kl} heet de energie-impulstensor. De elementen T_{41}, T_{42}, T_{43} zijn de x,y,z-componenten van de impuls van het veld per volume-eenheid (afgezien van een factor).

Opmerking. Natuurlijk kan men alleen verwachten dat de gevonden behouden grootheden met de van ouds bekende

overeenstemmen tot op een factor. Immers de Lagrange-dichtheid L is tot nog toe slechts op een constante factor na bepaald. In de practijk kiest men deze factor in L achteraf zo dat de hier geconstrueerde T_{44} gelijk is aan minus de energiedichtheid. Dat is bijvoorbeeld de reden voor de factor $-1/16\pi$ in (5)

Opgave 31. De golfvergelijking voor het scalaire veld u wordt weergegeven door $L = -\frac{1}{2} u_{,k}^2$. Laat zien dat $- T_{44}$ de energiedichtheid is en schrijf de bijbehorende behoudswet op.

Opgave 32. Schrijf de tensor T_{kl} expliciet voor de Lagrange-dichtheid (5) en laat zien dat T_{k4} de impulsdichtheid maal $(-i/c)$ is en dat $- T_{44}$ de energie-dichtheid is.

2. Behoud van impulsmoment voor scalair veld. Stel wederom dat L niet expliciet van de x_k afhangt, en bovendien dat het veld uit één component u bestaat, en dat de afgeleiden $u_{,k}$ in L alleen voorkomen in de combinatie $u_{,k}^2$. Beschouw een orthogonale assentransformatie

$$x'_k = x_k + \varepsilon\, a_{kl} x_l, \qquad a_{kl} = -a_{lk}. \qquad (k,l = 1,2,3,4)$$

De groep van deze transformaties bevat zowel de ruimtedraaiingen als de Lorentz-transformaties. Als u bij deze transformatie hetzelfde blijft, is onze L kennelijk invariant. Invullen in (23) levert dus een behoudswet voor

$$\Psi_k = - \frac{\partial L}{\partial u_{,k}}\, u_{,l}\, a_{lh}\, x_h + L\, a_{kh}\, x_h$$

$$= T_{kl}\, a_{lh}\, x_h.$$

Wegens $a_{lh} = - a_{hl}$ kan men ook zetten

$$2\Psi_k = (T_{kl}x_h - T_{kh}x_l)\, a_{lh}.$$

Daar nu met de anti-symmetrie van a_{lh} rekening is gehouden, kan men ze in deze formule als onafhankelijk beschouwen, zodat men een behoudswet vindt voor elke l,h, namelijk

$$\frac{dM_{klh}}{dx_k} = 0, \qquad M_{klh} = T_{kl}x_h - T_{kh}x_l. \qquad (26)$$

Dit zijn zes behoudswetten. In de elementen van M_{klh} voor $k = 4$, $l = 1,2,3$, $h = 1,2,3$ herkent men het vectoriële product van de impulsdichtheid met de voerstraal, dat is dus de impulsmomentdichtheid. Deze drie behoudswetten drukken dus het behoud van impulsmoment van het scalaire veld uit. De overige drie behoudswetten krijgt men door $l = 4$, $h = 1,2,3$ in te vullen; zij blijken uit te drukken dat het zwaartepunt zich met constante snelheid voortbeweegt.

Opgave 33. Stilzwijgend is gebruikt dat de Jacobi-determinant $d(x')/d(x)$ gelijk 1 is; controleer dit.

Opgave 34. Laat zien dat de behoudswet voor M_{klh} equivalent is met de vergelijking

$$T_{kl} = T_{lk}.$$

Verifieer dat hieraan voldaan is als L de boven geëiste gedaante heeft.

Opgave 35. De gestelde eis voor L is te sterk; laat zien dat de behoudswet ook geldt als L wel van de x_k afhangt, mits alleen in de combinatie x_k^2.

Opgave 36. Op een gegeven tijdstip $t = t_0$ kan men het veld willekeurig kiezen. Stel dat het zo gekozen is dat het overal nul is behalve in een zeer klein gebiedje ter plaatse $\vec{r}$. Bewijs dat dan geldt

$$\int M_{412}\, d^3\vec{r} = \frac{i}{c}\,(\vec{r} \wedge \vec{p})_z ,$$

waarin de integraal genomen is over de hele ruimte met $t = t_o$, en $\vec{p}$ de totale impuls van het veld is.

<u>5. Behoud van impulsmoment voor vectorieel veld.</u> Er zijn nu vier veldcomponenten u_k die bij een vier-dimensionale assendraaiing onderling netzo transformeren als de x_k,

$$x_k' = x_k + \varepsilon\, a_{kl}\, x_l, \qquad u_k' = u_k + \varepsilon\, a_{kl} u_l.$$

Stel dat L invariant is voor deze transformatie, bijvoorbeeld doordat hij de x_k niet bevat, en u_k en derzelver afgeleiden slechts gecombineerd in de vorm van scalaire producten, zoals u_k^2, $u_{k,l}^2$, $u_{k,l} u_k u_l$. In dat geval bestaat de behouden grootheid uit (25) plus een extra term:

$$\Psi_k = T_{kl}\, a_{lh}\, x_h + \frac{\partial L}{\partial u_{l,k}}\, a_{lh}\, u_h.$$

Omdat de a_{lh} antisymmetrisch zijn, maar verder willekeurig vindt men weer zes behoudswetten, namelijk

$$\frac{dJ_{klh}}{dx_k} = 0, \qquad J_{klh} = M_{klh} + S_{klh}$$

waarin

$$S_{klh} = \frac{\partial L}{\partial u_{l,k}}\, u_h - \frac{\partial L}{\partial u_{h,k}}\, u_l\ .$$

Deze extra bijdrage tot het impulsmoment komt dus van het feit dat bij draaiing de veldcomponenten ook onderling transformeren, en kan niet zoals M geschreven worden als een vectorproduct van de voerstraal en de lineaire impuls. Men noemt S de <u>spindichtheid</u>, en M de baanimpulsmomentdichtheid. De totale spin is de axiale vector $\vec{S}$, waarvan de componenten S_k gegeven worden door

$$\int S_{4lh}\, d^3\vec{r} = \frac{i}{c}\, \varepsilon_{lhk}\, S_k.$$

Opgave 37. Druk $\vec{S}$ explicict in de S_{4lh} uit.

Opgave 38. Leid een behoudswet voor het impulsmoment van het electromagnetische veld af.

Opgave 39. Laat zien dat voor een Lagrange-dichtheid die alleen een functie is van u_k^2 en $u_{k,l}^2$ behoudswetten voor baanimpulsmoment en spin afzonderlijk gelden; maar dat in het geval dat L ook scalaire producten zoals $x_k u_k$ en $u_{k,l}u_k u_l$ bevat alleen het totale impulsmoment J aan een behoudswet voldoet. (Men spreekt dan van "spin-baankoppeling".)

Opgave 40. In het algemene geval van een meercomponentig veld u_ν zullen de componenten bij assendraaiing op een of andere wel-gedefinieerde wijze onderling transformeren,

$$u'_\nu = u_\nu + \varepsilon A_{\nu\mu} u_\mu .$$

De coefficiënten $A_{\nu\mu}$ zijn functies van de a_{kl}, en in eerste orde van ε kunnen dat slechts lineaire functies zijn,

$$A_{\nu\mu} = C^{kl}_{\nu\mu} a_{kl} .$$

Laat zien dat voor dit geval

$$S_{klh} = 2 C^{lh}_{\nu\mu} \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} u_\mu .$$

Opgave 41. Pas dit resultaat toe op de Pauli-spin (11).

4. Behoud van lading. De bewegingsvergelijking voor een complex veld ψ valt onder het algemene schema van § 1 als men reëel en imaginair deel als twee-componentig reëel veld opvat, of liever nog

$$\psi = \frac{u_1 + iu_2}{\sqrt{2}} , \qquad \psi^* = \frac{u_1 - iu_2}{\sqrt{2}} .$$

De Lagrange-dichtheid van zo'n veld bevat altijd in elke

term evenveel factoren ψ als ψ^*, zodat hij niet van de phase van ψ afhangt. M.a.w. L is invariant voor de volgende transformatie van het veld

$$\psi' = \psi e^{i\varepsilon}, \qquad \psi^{*\prime} = \psi^* e^{-i\varepsilon}.$$

Als ε infinitesimaal is geeft dat voor u_1, u_2

$$u_1' = u_1 - \varepsilon u_2, \qquad u_2' = u_2 + \varepsilon u_1.$$

De behouden grootheid is dus

$$\Psi_k = - \frac{\partial L}{\partial u_{1,k}} u_2 + \frac{\partial L}{\partial u_{2,k}} u_1 .$$

Dit leidt dus tot een behoudswet voor een scalaire grootheid met bijbehorende stroomvector, die als behoud van lading wordt geïnterpreteerd.

Opgave 42. Leid de meer gebruikelijke gedaante af:

$$\Psi_k = i \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} \psi - \frac{\partial L}{\partial \psi^*_{,k}} \psi^* \right).$$

Opgave 43. Vind de behoudswet voor de Klein-Gordon-vergelijking, dewelke beschreven wordt door de Lagrange-dichtheid

$$L = - \tfrac{1}{2} \psi^*_{,k} \psi_{,k} + \tfrac{1}{2} m^2 \psi^* \psi.$$

5. Transformaties van het veld alleen.

Voor een transformatie, waarbij niet de coördinaten x_k, maar alleen de veldcomponenten u_ν veranderen worden de formules veel eenvoudiger. De infinitesimale transformatie heeft dan de gedaante

$$x'_k = x_k, \qquad \text{dus} \qquad \varphi_k = 0, \tag{27a}$$

$$u'_\nu = u_\nu + \varepsilon\chi_\nu(x,u) \tag{27b}$$

$$u'_{\nu,k} = u_{\nu,k} + \varepsilon \frac{d\chi_\nu}{dx_k} . \tag{27c}$$

De invariantie-eis (24) luidt nu

$$L(x,u',u'_{,1}) = L(x,u,u_{,1}) + \varepsilon \frac{d\Omega_k}{dx_k} . \tag{28}$$

Men ziet direct dat dit meebrengt dat het bijbehorende stel differentiaalvergelijkingen dezelfde gedaante heeft voor u' als voor u, vergelijk (6). De bekendste toepassing is de afleiding van ladingsbehoud in de vorige paragraaf. We willen hier laten zien dat elke transformatie tot dit geval herleid kan worden.

Immers, beschouw een coördinaten-transformatie, waarbij de veldcomponenten niet veranderen

$$x'_k = x_k + \varepsilon\varphi_k, \qquad u'_\nu = u_\nu . \tag{29}$$

Zoals bekend kan men een coördinaten-transformatie opvatten hetzij als het invoeren van nieuwe coördinaten voor dezelfde punten, hetzij als het verplaatsen van de punten naar nieuwe posities. De laatste opvatting maakt duidelijk dat het resultaat equivalent moet zijn met het verplaatsen van het veld in tegengestelde richting. Men kan daarom deze coördinatentransformatie ook schrijven als een transformatie van het veld,

$$x'_k = x_k, \tag{30a}$$

$$u'_\nu(x_1) = u_\nu(x_1-\varepsilon\varphi_1) = u_\nu - \varepsilon\, u_{\nu,1}\, \varphi_1 . \tag{30b}$$

Daarmee is de coördinatentransformatie (29) vertaald in een veldtransformatie van de gedaante (27) met

$$\chi_\nu = - \varepsilon\, u_{\nu,1}\, \varphi_1 . \tag{30c}$$

Het enige verschil is dat deze χ_ν blijkbaar niet een functie van x_k en u_ν alleen is, maar ook de veldafgeleiden $u_{\nu,1}$ bevat.

We controleren dat de toepassing van het Noethertheorema (30) hetzelfde oplevert als op (29). De invariantie-eis (24) geformuleerd voor de transformatie (29) luidt

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}\varphi_k - \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} u_{\nu,1} \frac{d\varphi_1}{dx_k} + L \frac{d\varphi_k}{dx_k} = \frac{d\Omega_k}{dx_k} , \tag{31}$$

en leidt tot een behoudswet voor

$$\Psi_k = - \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} u_{\nu,1}\, \varphi_1 + L\, \varphi_k - \Omega_k .$$

De invariantie-eis voor (30) luidt

$$- \frac{\partial L}{\partial u_\nu} u_{\nu,1}\varphi_1 - \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} \frac{d}{dx_k} u_{\nu,1}\varphi_1 = \frac{d\Omega_k'}{dx_k} , \tag{32}$$

waarin Ω_k' een andere functie dan Ω_k kan zijn. Dit leidt tot een behoudswet voor

$$\Psi_k' = - \frac{\partial L}{\partial u_{\nu,k}} u_{\nu,1}\, \varphi_1 - \Omega_k' .$$

Het is gemakkelijk na te rekenen dat het linkerlid van (31) minus het linkerlid van (32) gelijk is aan

$$\frac{d}{dx_k} L\, \varphi_k .$$

Dus volgt dat beide invariantie-eisen equivalent zijn, en dat geldt

$$\Omega_k = \Omega_k' + L\, \varphi_k .$$

Daaruit blijkt dat $\psi_k = \psi_k'$, zodat inderdaad de coördinaten-

transformatie (29) en zijn vertaling als veldtransformatie (30) dezelfde invariantie-eigenschappen hebben die tot dezelfde behoudswetten leiden.

De behandeling van zuivere veldtransformaties is eenvoudiger dan die van coördinatentransformaties, maar anderzijds is de invariantie van L voor een coördinatentransfortie meestal makkelijker te vinden dan die voor de daaruit afgeleide veldtransformatie, vooral omdat men meestal met coördinatentransformaties te maken heeft waarbij de Jacobi-determinant de waarde 1 heeft, en Ω_k nul is.

Opgave 44. Leid de stelling van Noether direct af uit (32).

Opgave 45. Behandel de invariantie van de klassieke Lagrange-functie $L(u_\nu, \dot{u}_\nu)$ voor tijdtranslatie door de transformatie van t te vertalen in een transformatie van de u_ν.

Opgave 46. Bewijs dat de Jacobi-determinant van Lorentz-transformaties gelijk aan 1 is bij toepassing op velden, maar niet bij toepassing op klassieke deeltjes.

Een toepassing. De beweging van een relativistisch deeltje kan beschreven worden door de vier grootheden

$$u_1 = x, \quad u_2 = y, \quad u_3 = z, \quad u_4 = it$$

als functie van de eigentijd τ. Veronderstel dat het deeltje geladen is en zich beweegt in een gegeven electromagnetisch veld, beschreven door

$$F_{\nu\mu}(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x).$$

Hierin staat x voor de vier coördinaten x_ν in de ruimte, te onderscheiden van de u_ν die de positie van het deeltje aangeven. De bewegingsvergelijkingen van het deeltje zijn

$$\ddot{u}_\nu = F_{\nu\mu}(u)\,\dot{u}_\mu\ , \tag{33}$$

waar de punt differentiatie naar τ aanduidt. Deze bewegingsvergelijkingen kunnen beschreven worden door de Lagrange-functie

$$L(u,\dot{u}) = \tfrac{1}{2}\,\dot{u}_\nu^2 + \dot{u}_\nu A_\nu(u).$$

Stel nu dat er een richting is, aangegeven door een constante viervector a_λ, waarin het veld $F_{\nu\mu}$ niet verandert,

$$a_\lambda \partial_\lambda F_{\nu\mu}(x) = 0. \tag{34}$$

Het is dan duidelijk dat de bewegingsvergelijkingen invariant zijn voor een translatie in de richting a_λ, dus voor

$$\tau' = \tau, \qquad u'_\nu = u_\nu + \varepsilon a_\nu\ , \qquad \dot{u}'_\nu = \dot{u}_\nu\ .$$

Dit is een transformatie van de gedaante (27). Men verwacht dat dit overeenkomt met een invariantie-eigenschap van de Lagrange-functie. Om dat te verifiëren merke men op dat (34) zegt

$$\partial_\nu(a_\lambda\partial_\lambda A_\mu) = \partial_\mu(a_\lambda\partial_\lambda A_\nu),$$

hetgeen uitdrukt dat $a_\lambda\partial_\lambda A_\nu$ de gradiënt van een scalair veld Ω is

$$a_\lambda\partial_\lambda A_\nu(x) = \partial_\nu\Omega(x).$$

Men ziet nu dat

$$L(u',\dot{u}') - L(u,\dot{u}) = \varepsilon\,\dot{u}_\nu a_\lambda\partial_\lambda A_\nu = \varepsilon\,\frac{d\Omega(u)}{d\tau}\ , \tag{35}$$

hetgeen juist de invariantie-eis (28) is.

De stelling van Noether zegt nu dat de grootheid

$$\Psi(u,\dot{u}) = a_\nu\{\dot{u}_\nu + A_\nu(u)\} - \Omega(u) \qquad (36)$$

behouden is, dus $d\Psi/d\tau = 0$. Indien er meer richtingen a_ν zijn, vindt men evenveel behouden grootheden.

Dit resultaat kan gebruikt worden om de beweging van een relativistisch geladen deeltje in een vlakke, monochromatische electromagnetische golf te vinden. Voor elk vrij electromagnetisch veld geldt in de Lorentz-ijking

$$\partial_\lambda^2 A_\nu = 0 \quad \text{en} \quad \partial_\nu A_\nu = 0.$$

Als bovendien het veld een vlakke monochromatische golf voorstelt bevat $A_\nu(u)$ de vier variabelen u_ν alleen in de combinatie

$$\vec{k}.\vec{r} - kt = k_\lambda x_\lambda .$$

Hierin is $(\vec{k},ik) = k_\lambda$ een constante viervector met de eigenschap $k_\lambda^2 = 0$, die de golfvector en de frequentie aangeeft. M.a.w. men kan zetten

$$A_\nu(x) = \Phi_\nu(k_\lambda x_\lambda),$$

waarin de Φ_ν vier functies van het ene argument $k_\lambda x_\lambda$ zijn. Zij moeten alleen nog voldoen aan

$$k_\nu \Phi'_\nu = 0 ,$$

waar het accent differentiatie naar het argument aanduidt. Hieruit volgt dat $k_\nu \Phi_\nu$ een constante is, die nul genomen mag worden omdat de Φ_ν toch maar op een constante na bepaald zijn.

Het is duidelijk dat dit veld invariant is voor een translatie in de richting a_λ indien a_λ loodrecht op k_λ staat:

$$a_\lambda \partial_\lambda A_\nu = a_\lambda k_\lambda \Phi'_\nu = 0 \qquad \text{indien} \quad a_\lambda k_\lambda = 0.$$

Er zijn drie onafhankelijke richtingen loodrecht op k_λ. Voor

elk ervan geldt (35) met $\Omega = 0$. In het bijzonder staat k_λ loodrecht op zichzelf, en de corresponderende behoudswet is volgens (36)

$$\Psi = k_\lambda \dot{u}_\lambda = C.$$

Daaruit volgt

$$k_\lambda u_\lambda = C(\tau-\tau_o),$$

met twee integratie-constanten C en τ_o. De τ_o is triviaal en mag wel nul gezet worden. Dan is het veld ter plaatse van het deeltje

$$A_\nu(u) = \Phi_\nu(C\tau)$$

$$F_{\nu\mu}(u) = k_\nu \Phi'_\mu(C\tau) - k_\mu \Phi'_\nu(C\tau)$$

$$= f_{\nu\mu}(\tau).$$

Hiermee is dus de veldsterkte die het deeltje voelt op elk tijdstip τ gevonden.

De grootheden $F_{\mu\nu}(u)$ in de bewegingsvergelijkingen (33) zijn nu bekende functies $f_{\nu\mu}(\tau)$ van τ geworden, zodat de vergelijkingen gereduceerd zijn tot vier lineaire vergelijkingen met niet-constante coëfficienten,

$$\ddot{u}_\nu = f_{\nu\mu}(\tau)\ \dot{u}_\mu.$$

Om die verder te vereenvoudigen kan men gebruik maken van de andere twee richtingen loodrecht op k_λ waarin $F_{\mu\nu}(x)$ niet verandert. Het makkelijkst is om een ruimte-draaiing toe te passen die de z-as langs de vector $\vec{k}$ legt, zodat

$$k_\lambda = (0,0,k,ik).$$

De andere twee loodrechte richtingen zijn nu de x-as en de y-as. Inderdaad is $F_{\mu\nu}(x)$ een functie alleen van het argument

$k_\lambda x_\lambda = k(z-t)$ en dus onafhankelijk van x en y.

Laat nu nog de golf lineair gepolarizeerd zijn, zodat men de x-as langs $\vec{E}$ en de y-as langs $\vec{B}$ kan leggen. Tenslotte veronderstellen we voor het gemak nog een zuivere sinusgolf

$$E_x = B_y = a \sin k(z-t) = a \sin C\tau .$$

Daarmee is $f_{\nu\mu}(\tau)$ gegeven en de bewegingsvergelijkinen kunnen nu uitgeschreven worden.

$$\ddot{u}_1 = - B_y\dot{u}_3 - iE_x\dot{u}_4 = -(\dot{u}_3-\dot{u}_4)\, a \sin C\tau = - \frac{Ca}{k} \sin C\tau$$

$$\ddot{u}_2 = 0$$

$$\ddot{u}_3 = \dot{u}_1\, a \sin C\tau$$

$$\ddot{u}_4 = i\, \dot{u}_1\, a \sin C\tau .$$

Dit kan gemakkelijk opgelost worden. De eerste vergelijking geeft

$$u_1(\tau) = \frac{a}{kC} \sin C\tau + C_1\tau .$$

Wederom laten we voor het gemak triviale integratieconstanten weg. De tweede vergelijking geeft

$$u_2(\tau) = C_2\tau .$$

De derde vergelijking geeft

$$u_3(\tau) = - \frac{a^2}{8kC^2} \sin 2C\tau - \frac{aC_1}{C_2} \sin C\tau + C_3\tau .$$

De vierde vergelijking levert niets nieuws omdat we al weten

$$u_4(\tau) = iu_3(\tau) - iC\tau/k.$$

Hiermee is de hele beweging van het deeltje vastgelegd.

Opgave 47. Controleer dat in totaal het juiste aantal integratieconstanten is verkregen.

Opgave 48. Een extra-beperking is aan de oplossing opgelegd door de eis $\dot{u}_\lambda^2 = -1$. Laat zien dat hieraan inderdaad voldaan kan worden door de integratie-constanten geschikt te kiezen.

Opgave 49. Hoe moet men uit de gevonden oplossing de positie van het deeltje als functie van de tijd (i.p.v. de eigentijd) vinden?

6. Verband met de viriaalstelling.

In deze paragraaf is $m = 1$ en $x_1 = t$. We beschouwen het geval dat de invariantie-eigenschap (17) niet geldt maar daarvoor in de plaats

$$L'(t',u',\dot{u}')\, dt' = (1 + \varepsilon\alpha)\, L\,(t,u,\dot{u})\, dt,$$

met een constante α. Men heeft dus een infinitesimale transformatie die dezelfde invariantie slechts op een factor na verwezenlijkt. We zullen zien dat in dit geval geen behoudswet volgt, maar wel een viriaalstelling.

Dezelfde algebra als in § 3 leidt nu niet tot (22) maar tot

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_\nu}(\chi_\nu - \dot{u}_\nu\varphi) + L\varphi\right\} = \alpha L \qquad (37)$$

Integreer van t_1 tot t_2,

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_\nu}(\chi_\nu - \dot{u}_\nu\varphi) + L\varphi\right]_{t_1}^{t_2} = \alpha \int_{t_1}^{t_2} L\, dt.$$

Veronderstel nu dat L niet expliciet van t afhangt; dan is in het linkerlid de grootheid die met φ is vermenigvuldigd net de energie en dus constant:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_\nu}\chi_\nu\right]_{t_1}^{t_2} - E\left[\varphi\right]_{t_1}^{t_2} = \alpha\int_{t_1}^{t_2} L\, dt. \qquad (38)$$

Deel nu door $t_2 - t_1$ en neem de limiet $t_2 \to \infty$, $t_1 \to -\infty$. Het rechterlid wordt $\alpha\bar{L}$, waar $\bar{L}$ het tijdgemiddelde van L is. Als voor de beschouwde oplossing de grootheden [ ] eindig blijven, is in de limiet het linkerlid nul. Als echter deze grootheden nog termen evenredig met t bevatten, moeten die apart behandeld worden , zoals in de volgende toepassingen gedemonstreerd wordt.

<u>Toepassing op de Kepler-beweging</u>. De Lagrange-functie

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \tfrac{1}{2}\,\dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{r}$$

wordt door de schaaltransformatie

$$\vec{r}\,' = \lambda\vec{r}, \qquad t' = \lambda^{\frac{3}{2}}t$$

getransformeerd volgens $L(\vec{r}\,',\dot{\vec{r}}\,') = \lambda^{-1}\, L(\vec{r},\dot{\vec{r}})$. De overeenkomstige infinitesimale transformatie is

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \varepsilon\vec{r}, \qquad t' = t + \frac{3}{2}\,\varepsilon t.$$

Daarvoor geldt dus

$$L(\vec{r}\,',\dot{\vec{r}}\,')\, dt' = (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon)\, L(\vec{r},\dot{\vec{r}})\, dt.$$

Substitueer derhalve in (37)

$$\varphi = \frac{3}{2}\, t, \qquad \chi = \vec{r} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}.$$

Er komt

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\cdot\vec{r} - \frac{3}{2}t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\cdot\dot{\vec{r}} - L\right)\right\} = \tfrac{1}{2}\, L.$$

De grootheid in ronde haakjes is de energie en men krijgt

$$\frac{d}{dt}\left\{\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right\} = \frac{3}{2}\, E + \tfrac{1}{2}L = 2E - V.$$

Integreer en deel door $t_2 - t_1$:

$$\frac{1}{t_2-t_1}\left[\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right]_{t_1}^{t_2} = 2E - \bar{V}.$$

Voor een baan die op eindige afstand van de oorsprong blijft zijn $\vec{r}$ en $\dot{\vec{r}}$ eindig, zodat men het bekende resultaat vindt

$$\bar{V} = 2E, \qquad \bar{T} = -E.$$

Opgave 50. Leid de viriaalstelling voor de harmonische oscillator af uit het feit dat de Lagrange-functie homogeen in de coördinaat is.

Opgave 51. Waarom kan men op deze manier nooit meer dan één viriaalstelling vinden?

Opgave 52. Formuleer een viriaalstelling voor velden. Gebruik die om te bewijzen dat voor een snaar de gemiddelde kinetische en potentiële energie gelijk zijn.

Toepassing op een verstrooiingsprobleem. De potentiaal r^{-1} is niet geschikt om verstrooiingsproblemen aan te demonstreren, omdat die zo zwak afneemt op grote afstand, dat het verstrooide deeltje zich nooit helemaal als vrij deeltje gedraagt. We nemen daarom

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \tfrac{1}{2}\,\dot{\vec{r}}^{\,2} - r^{-a}. \qquad (a > 1)$$

Men vindt

$$\varphi = \frac{a+2}{2}\,t, \qquad \chi = \vec{r}, \qquad \alpha = 1 - \frac{a}{2}.$$

De vergelijking (38) neemt dan de vorm aan

$$\left[\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}\right]_{t_1}^{t_2} - \frac{a+2}{2}\,E\,(t_2-t_1) = \left(1 - \frac{a}{2}\right)\int_{t_1}^{t_2} L\,dt.$$

Op grote afstand kan de beweging voorgesteld worden door

$$\vec{r} = \vec{v}(t - \tau) + \vec{b} \qquad \text{met} \qquad \vec{v}\cdot\vec{b} = 0.$$

De constanten $\vec{v}$, τ, $\vec{b}$ hebben voor $t_2 \to +\infty$ de waarden $\vec{v}_2$, τ_2, $\vec{b}_2$ en voor $t_1 \to -\infty$ de waarden $\vec{v}_1$, τ_1, $\vec{b}_1$. Bovendien geldt $v_2^2 = v_1^2 = 2E$. Vult men dit in de eerste term in, dan komt er

$$2E(t_2-\tau_2-t_1+\tau_1) - \frac{a+2}{2} E(t_2-t_1) = \left(1-\frac{a}{2}\right) E(t_2-t_1) - (2-a)\int_{t_1}^{t_2} V dt.$$

De termen evenredig met $t_2 - t_1$ vallen tegen elkaar weg en de integraal convergeert, zodat er komt

$$2E(\tau_1-\tau_2) = (a-2)\int_{-\infty}^{\infty} V\, dt.$$

Nu is τ_1 het moment waarop het invallende deeltje de oorsprong zou bereiken als er geen potentiaal was en het regelrecht op de oorsprong afgestuurd was, dus met botsingsparameter $b_1 = 0$. Dito is τ_2 het moment waarop het uitlopende deeltje zou moeten vertrekken uit de oorsprong om zonder potentiaal voor grote t_2 dezelfde afstand te bereiken als het nu doet. Dus is $\tau_1 - \tau_2$ het tijdverlies van ons deeltje vergeleken bij een deeltje dat met constante energie E via de oorsprong zou lopen. Deze botsingsvertraging hebben we dus uitgedrukt in een tijdintegraal over de potentiaal die ons deeltje op zijn baan ondergaat.

Opgave 53. Laat zien dat deze formule niet geldt voor $a \leq 1$.

Opgave 54. Laat $\vec{r}_1$ een punt op de baan zijn lang voor de botsing, $\vec{r}_2$ een punt lang na de botsing, en s de weglengte gemeten langs de baan. Bewijs

$$\frac{r_1+r_2}{\sqrt{E}} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{\sqrt{E-V}} = \frac{a-2}{2E}\int_{r_1}^{r_2} \frac{V\,ds}{\sqrt{E-V}} .$$